

量子もつれと特殊相対論

著者	西川 善久
雑誌名	甲南大学紀要．理工学編
巻	55
号	1
ページ	1-38
発行年	2008-07-31
URL	http://doi.org/10.14990/00000153

量子もつれと特殊相対論

西川 善久

(甲南大学大学院自然科学研究科)

(受理日 2008 年 4 月 25 日)

要約

量子もつれの状態は量子力学の不完全さを指摘するために Einstein によって提唱された。しかし現在、その存在は実験で検証され、量子情報理論では量子テレポーテーション等の資源として扱われている。2000 年頃になって、spin によって定義された粒子対状態がなす量子もつれは Wigner 回転とよばれる相対論的效果のため非自明な変換を受けることが知られるようになった。本稿では量子もつれがなす相関、及び、Wigner 回転がその相関に与える影響を解説した後、従来おこなわれてきた1つの粒子対状態をもちいたモデルに対して拡張をおこなう。その拡張したモデルでは量子もつれの状態を複数の粒子対状態による重ね合わせとして準備する。そして相対論的效果を大域的にみるために von Neumann のエントロピーと Shannon のエントロピーを計算し図示する。その結果について粒子の区別可能性を交えて議論をおこなう。

1 序論

近年、Einstein、Podolsky と Rosen (EPR) によって提唱された量子もつれ (quantum entanglement) の状態に対する特殊相対論的效果をみる新たな研究が試みられるようになった。相対論的座標変換、すなわち Lorentz 変換によって量子もつれにどのような変化が現れるかという研究である。[2]-[14] 量子もつれは、量子情報理論の分野では量子テレポーテーション[15] 等の「資源」として扱われている。[16]-[18] したがって、量子もつれに対する相対論からの影響は量子情報の立場からみると「ノイズ」として現れることになり、この点からも非常に興味がある研究である。

1935 年に量子もつれは提唱された。量子もつれの状態は EPR 状態ともよばれており、例えば2つの離れた粒子の間に「遠隔相関」というあたかも超光速で情報が伝わるような性質があるように記述される。EPR による発表の当初は、「量子力学の不完全さ」を指摘するために提唱された状態であった。そのため量子もつれによる相関 (量子相関または EPR 相関) は、一見、量子力学における同時観測問題や超光速での情報の伝播という特殊相対性理論に対する「矛盾」が見受けられる。そのため量子もつれの問題は EPR 「パラドックス」と呼称されていた。Bohm によって 2 spin 系による量子もつれの状態が提案[19]された後、量子相関は、total-spin 0 の1つの粒子が2つの粒子に分離したという「1つの粒子対状態」をもちいた spin 相関、として多くの議論がなされてきた。「局在性の否定」ともいべきこの EPR パラドックスを解消するために考案された「隠れた変数仮説」に

関する議論の多くは、このような Bohm による状況想定の下でなされてきた。1964 年に John S. Bell が、「局在性」が存在するなら満たされるべき不等式を発表した。[20] この「Bell の不等式」は 1982 年に Aspect によって「破れている」ことが実験で確認された。[21] 局在性の否定である。したがって、量子もつれは「量子力学の不完全さ」を述べる「概念」から「量子力学の不可思議さ」を述べる「現象」となった。そして 1993 年、Bennet によって「量子テレポーテーション」が提唱された。「量子力学の不可思議さ」を強調する現象から、量子もつれは量子情報理論の「資源」となったのである。

2000 年頃、相対論的速度領域で動いている座標系で spin という座標系の取り方に依存する量を観測した場合どのような変化が生じるか、という問題が提起された。元来、量子もつれの状態を論じる場合、交換しない物理量があたかも同時に観測できているようにみえる「同時観測の問題」、状態ベクトルの収縮による「光の速度を超えた情報の伝達」、動いている座標系同士では特殊相対論によれば同時刻の概念がなりたたないために生じる「同時性の問題」があった。[18, 22] 新たな研究はそれらとは異なり量子もつれを受け入れた上で、移動している粒子の spin を観測者が測定した場合、どのように観測されるかについて相対論的速度領域、すなわち光速に近い領域を考慮にいて論じている。Lorentz 変換に対応する Unitary 変換を状態ベクトルに作用させると、運動している粒子の spin を移動している観測者が観測する場合には、ある非自明な効果を考慮しなければならないことが導かれる。この非自明な効果は、Lorentz 変換を 2 回施すことにより現れる相対論的效果であり、質量粒子の場合は回轉變換となる。[23] この回轉變換は Wigner 回転とよばれている。この Wigner 回転のため、spin 状態は速度と連動して混じり合うことになる。その結果、単一粒子でも von Neumann のエントロピーが Lorentz 不変でないことが示されている。[2] また Bell の不等式の破れが減少することが議論されてきた。[7]-[11]

情報理論では、情報量を定量化するために Shannon のエントロピーがもちいられる。この Shannon のエントロピーから派生した von Neumann のエントロピーは量子力学において「状態」の「純度」(purity) を定量化した量である。[16]-[18] von Neumann のエントロピーは、Wigner 回転のために、一般には Lorentz 不変ではなくなる。そのため von Neumann のエントロピーは相対論的效果を考慮にいた EPR 相関を評価するために使われている。[13, 14]

本稿では、これまで量子相関を議論する際にもちいられてきた「1つの粒子対状態モデル」に対してモデルの拡張をおこなう。そして z 方向に空間的に固定して定義された spin 部分の相関について von Neumann のエントロピーをもちいて議論する。実験室系で、親粒子が 2つの粒子に分離して飛んでいった、とする。このとき 2つの粒子の重心系は親粒子の静止系にあたり、この座標系では「親粒子が 2つの粒子に分離して互いに逆方向に飛んでいった」ことになる。重心系では、2つの $\text{spin} \frac{1}{2}$ 粒子は同じ質量、同じ 3 元運動量の絶対値をもち、spin-singlet 状態をなすという状況を想定する。ただし、ここで従来の単一粒子対状態による記述とは異なり、粒子対状態を「複数の粒子対状態の重ね合わせ」として記述する。各々の粒子対状態は運動方向によって分類されている。このとき重心系では各々の spin-singlet 状態は 4 元運動量状態と spin 状態をもちいて記述されているが、4 元運動量状態と spin 状態について「重ね合わせ状態」はもつれていない。したがって、4 元運動量状態と spin 状態について「分離可能」な状態、すなわち因子状態 (factor state) となる。このとき spin 相関の von Neumann のエントロピーは 0 である。しかし、実験室系に移

る Lorentz 変換を適用すると、4 元運動量状態と spin 状態についてもつれた（分離不可能な）状態となる。spin 相関にのみ着目するため 4 元運動量状態について trace をとり、その縮約した密度行列から von Neumann のエントロピーを計算する。このとき von Neumann のエントロピーは粒子の 4 元運動量と Lorentz 変換の大きさに依存する形で有限の値をとる。上記のようなモデルの拡張は粒子分離時における立体角依存性を離散化させることで相対論的效果を際立たせるためである。

2 節では、量子もつれと隠れた変数論及び Bell の不等式、量子テレポーテーションについて文献[17, 24]を参考に述べている。3 節では文献[8, 23]を参考に、Lorentz 変換による状態ベクトルの Unitary 変換について議論する。ある座標系で spin-singlet 状態として粒子対状態が準備されていたとしても、Lorentz 変換で結ばれた別の座標系では Wigner 回転のために、spin-triplet 状態が混じることが示されている。4 節では、Wigner 回転による Bell の不等式の破れの減少について文献[8]を基に述べてある。

5 節では、拡張したモデルでの von Neumann のエントロピーを計算し図で示す。また Shannon のエントロピーと von Neumann のエントロピーを計算することで、2 つの粒子間の「区別可能性」の効果について議論する。

本稿では、テンソル和について Einstein の縮約を約束、対数の底は 2 を使用し、自然単位系 $c = \hbar = 1$ を採用する。

2 量子もつれと Bell の不等式

2.1 EPR 「パラドックス」-量子力学の記述は完全か？

1935 年、Einstein、Podolsky と Rosen (EPR) は量子力学における、あるパラドックスを指摘した。量子力学では空間的に十分離れた、言い換えれば「力」による相互作用が「瞬時」に伝播されない、2 つの系を 1 つの状態ベクトルによってあらわすことから生まれるパラドックスである。このような量子状態を量子もつれの状態もしくは EPR 状態という。

量子もつれの特徴を Bohm が提案した spin-singlet 状態、

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \quad (2.1)$$

で示す。ここで状態ベクトルは S_z の固有ベクトルによって展開されている。 $|\uparrow\rangle$ は「上向き」の $\text{spin} + \frac{1}{2}\hbar$ の状態を、 $|\downarrow\rangle$ は「下向き」の $\text{spin} - \frac{1}{2}\hbar$ の状態を指す。以後、 $\hbar = 1$ の単位系を採用する。この式の意味するところは spin の「測定」という状態ベクトルの「変換」をおこなったとき、spin-singlet 状態が $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ もしくは $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ に「収縮」することである。

したがって、量子もつれの状態にある粒子の内、片方の spin の値を観測すれば、例えば空間的に十分離れていても対になる粒子の spin の向きが確定的に予言される。あるいは離れた spin の状態が「瞬時に確定する」。 S_z の測定のみならず、 S_x もしくは S_y の測定をおこなった場合でも、状態ベクトルがその方向の $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ もしくは $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ に「収縮」して観測される。したがって、一方で S_z で観測し、他方で S_z とは異なる S_x や S_y で測定をおこなえばあたかも 2 つの角運動量がえられるように思える。しかし、量子力学では角運動量演算子は互いに非可換であるため、別方向成分の同時観測ができない。

このように「量子もつれ」状態の観測ではある地点での観測結果が十分遠方にある系の部分に対して影響を及ぼしているように考えられる。これは相対性理論の帰結の1つである「情報は光の速さを超えて伝わらない」と矛盾するように思われる。このためEPRパラドックスとよばれた時期もあったが、現在はパラドックスではなく量子力学の特徴であると考えられている。

この「パラドックス」を回避する1つの考えが、量子力学の記述が完全ではないとして隠れた変数を導入することであった。状態ベクトルが与えることは上向きもしくは下向きどちらで観測されるかという確率である。したがって、EPRになれば「物理的実在」を全て記述している訳でない、ととらえることも可能である。統計力学では、実際には「ある」変数に対する平均値で近似することによりその変数の存在を無視する。このために確率が登場する。そこで、量子力学は「実際には存在するが隠れている変数」を無視しているために確率が登場している不完全な理論である、とする。このような「隠れた変数」を導入することによりEPR「パラドックス」を解消する試みの中で、Bellの不等式が提案された。

2.1.1 局在性

いま、spinという物理現象が量子力学では「なく」、以下のように局在性をともなう「古典相関」にしたがうとする。局在性とは、系I及び系IIの測定結果は粒子が分かれたときには決まっており、片方に対する粒子の「測定方法」がもう片方の粒子の「測定結果」に影響し「ない」ことである。

空間的に十分離れた2つのspin系を考える。total-spin 0の状態にある1つの粒子が、 $\text{spin} + \frac{1}{2}$ と $\text{spin} - \frac{1}{2}$ の2つの粒子に分かれて互いに反対方向に離れていき、離れた2つの測定器、系Iと系II、で各々のspinの測定をおこなうとする。ここで系Iと系IIに（同じラベル付けをされた軸同士が平行となるような）直交座標系を導入し、 $x-z$ 平面にて z 軸から系Iでは角度 a 、系IIでは角度 b でspinを測定する（図1参照）。この場合、spinは $+\frac{1}{2}$

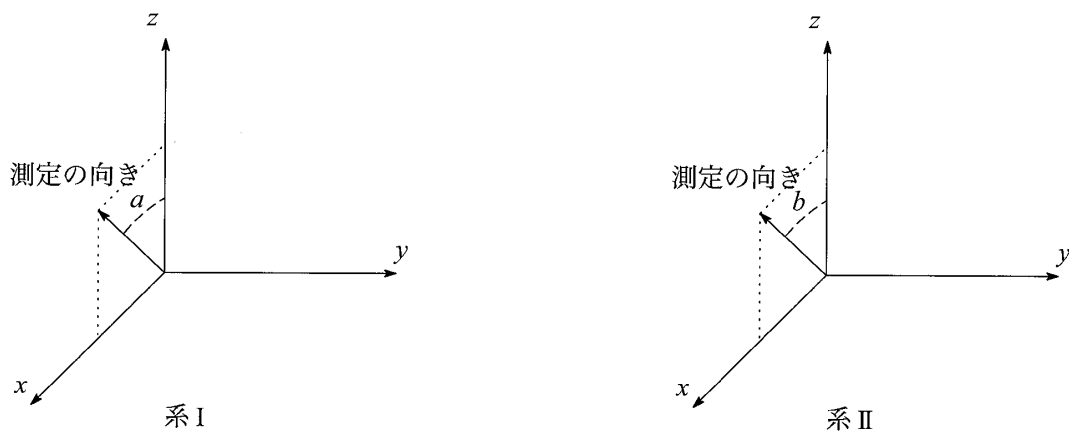


図1: 2spin系でのEPR状態の測定

か $-\frac{1}{2}$ の 2 値しかもたないため、系 I にて $\text{spin} + \frac{1}{2}$ が測定された場合は測定結果を $A(a) = +1$ 、 $\text{spin} - \frac{1}{2}$ が測定された場合は $A(a) = -1$ とし、系 II の場合も同様に、 $\text{spin} + \frac{1}{2}$ のとき $B(b) = +1$ 、 $\text{spin} - \frac{1}{2}$ のとき $B(b) = -1$ とする。系 I で測定された結果と系 II で測定された結果の「相関」を次のように定義する。

$$C(a, b, \lambda) \equiv A(a, \lambda)B(b, \lambda) \quad (2.2)$$

ここで、 λ は spin の測定において結果を左右する未知のパラメータであり、隠れた変数とよばれている。 λ は一般には測定ごとに異なる値 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ をもつ。隠れた変数は粒子がわかれたとき、既に決まっているパラメータである。したがって、系 I において a という測定方法を選択した場合、もし隠れた変数の値がわかっているのなら、系 II における測定方法 b での測定結果 $B(b, \lambda)$ は確定値として予言可能となる。隠れた変数がわかれば系 I の測定結果と系 II の測定結果がともに予言可能なため、系 I の測定方法は系 II の測定結果に影響をあたえない。相関の測定を N 回おこなったとすると、相関の平均値 $E(a, b)$ が求まる。 $N \rightarrow \infty$ という統計アンサンブルを仮定すれば $E(a, b)$ は相関の期待値として、

$$E(a, b) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n A_n(a, \lambda) B_n(b, \lambda) \quad (2.3)$$

となる。同じ隠れた変数についてまとめると、

$$E(a, b) = \sum_{\lambda} P(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) \quad (2.4)$$

となる。ここで、 $P(\lambda)$ は確率、 \sum_{λ} は存在する全ての隠れた変数の和であり $\sum_{\lambda} P(\lambda) = 1$ である。このとき $-1 \leq E(a, b) \leq 1$ であり、 $E(a, b) = 1$ のときは完全に相関、 $E(a, b) = -1$ のときは完全に反相関である、という。

系 I では角度 a もしくは a' で spin を測定し、系 II では角度 b もしくは b' で測定する。このとき、新たに「相関による関数」 $F(E(a, b), E(a, b'), E(a', b), E(a', b')) = F(a, a', b, b')$ を導入する。

$$F(a, a', b, b') \equiv E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b') \quad (2.5)$$

ここで、 $-1 \leq E(a, b), E(a', b), E(a', b'), E(a, b') \leq 1$ である。ある隠れた変数 λ に対する相関 $C(a', b', \lambda)$ について、

$$\begin{aligned} C(a, b, \lambda) \cdot C(a', b, \lambda) \cdot C(a, b', \lambda) &= A(a, \lambda)B(b, \lambda) \cdot A(a', \lambda)B(b, \lambda) \cdot A(a, \lambda)B(b', \lambda) \\ &= A(a, \lambda)^2 A(a', \lambda) B(b', \lambda) B(b, \lambda)^2 \\ &= A(a', \lambda) B(b', \lambda) \\ &= C(a', b', \lambda) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。ここで $A(a, \lambda)$ 及び $B(a, \lambda)$ の値は ± 1 の 2 値であることから $A(a, \lambda)^2 = B(a, \lambda)^2 = 1$ となることをもちいた。したがって、相関 $C(a, b, \lambda)$ の値が ± 1 という 2 値であることを考

慮にいれると、

$$C(a, b, \lambda) + C(a', b, \lambda) + C(a, b', \lambda) - C(a', b', \lambda) = \pm 2 \quad (2.7)$$

となる。ゆえに相関関数 $F(a, a', b, b')$ の絶対値は、

$$|E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b')| \leq 2 \quad (2.8)$$

となる。これは Bell の不等式の 1 種であり、考案者の頭文字をとって CHSH 不等式ともよばれている。ここで、 a, b, a', b' による測定が同時におこなわれなくても、統計アンサンブルを仮定することが十分可能な、すなわち式 (2.4) が成立する回数の実験をおこなうことで、式 (2.7) は成り立つ。

Bell の不等式は、状況設定を除けば全て代数計算の帰結である。しかし、その状況設定において物理的に重要な仮定があった。それが局在性であり、「片方の粒子の測定方法がもう片方の粒子の測定結果に影響しない」という仮定である。

2.1.2 Bell の不等式の破れ

$\text{spin} \frac{1}{2}$ 系では角運動量演算子 S_z は、Pauli 行列をもちいて $S_z = \frac{\sigma_z}{2}$ となる。したがって Pauli 行列 σ_z による $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の固有値は、それぞれ +1 と -1 である。このことから、量子論において相関の期待値は、

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \langle \psi | \sigma_z(a) \otimes \sigma_z(b) | \psi \rangle \\ &= -\cos(a - b) \end{aligned} \quad (2.9)$$

である。ここで、 $\sigma_z(\theta)$ は y 軸まわり回転の Unitary 変換 $U_y(\theta)$ をもちいて $\sigma_z(\theta) = U_y(\theta) \sigma_z U_y^\dagger(\theta)$ と定義される。したがって、相関関数は

$$\begin{aligned} F(a, a', b, b') &= E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b') \\ &= -\cos(a - b) - \cos(a' - b) - \cos(a - b') + \cos(a' - b') \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。

いま $a = \frac{\pi}{2}$, $a' = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $b' = \frac{3}{4}\pi$ で測定をおこなったとする。このとき Bell の不等式の左辺は、

$$\begin{aligned} &|E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b')| \\ &= |-\cos(a - b) - \cos(a' - b) - \cos(a - b') + \cos(a' - b')| \\ &= \left| -\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} \right| \\ &= 2\sqrt{2} \geq 2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。これは Bell の不等式 (2.8) と矛盾している。

したがって、代数計算の帰結である Bell の不等式は量子論において破れていることになる。Bell の不等式の破れは $2\sqrt{2}$ が最大である。

2.2 局在性の否定

局在性の仮定の下では、系Iで角度 a で測定した結果に系IIで角度 b での測定の結果が左右されるということはない。しかし、量子力学をもちいて導出された期待値（式（2.9））は系Iで測定した角度 a と系IIで測定した角度 b の差 $|a-b|$ に依存する量となる。Bellの不等式は、その発表の後、実験により幾度も破れていることが確認されており、局在性は否定されている。

このことから物理現象は、「古典的には相互作用できない」ぐらい十分に空間的に離れた系同士でも影響を及ぼしあうことが示される。ただし、相対性理論の帰結である情報が光の速さを超えては伝わらない、ということを直ちに否定するわけではない。系Iで測定した結果、系IIの spin の値が定まる（系Iの観測者が知ることができる）訳でないことに注意する。一見、「十分に空間的に離れた」系IIの情報が一瞬で伝わったかのように思えるかもしれない。しかし系Iの観測者と系IIの観測者は互いに無関係に自由な角度で spin の測定をおこなえる。したがって、非局在性が観測者に影響をあたえるのは、系Iの観測者と系IIの観測者が互いの測定結果を比べた時のみである。

2.3 量子テレポーテーション

量子もつれという現象は、量子力学の不完全さを強調するためにEPRによって提唱された概念であった。しかし、Bellの不等式の帰結及び実験による検証から、量子力学によって解き明かされたこの世界が満たすべき概念であることがわかった。このことから、「量子力学の不完全さ」を強調するためにEPRによって提唱された量子もつれは、EPRの思惑とは裏腹に、この世界の不可思議さを強調する概念とみなされてきた。その一方で、量子もつれという「自然現象」が存在するならそれを応用しようとする試みがなされた。その一つが量子テレポーテーションである。量子テレポーテーションとは、「状態ベクトル」という情報を遠隔地へと移動させる手続きであり、物理的存在を「テレポート」させるものではない。だが量子状態は観測すれば、ある状態へと収縮されることを考えれば、収縮を起こさずに「テレポート」させるということの有益さは計り知れない。

量子もつれの状態として次の状態ベクトルを準備する。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \quad (2.12)$$

ここで、例えば $|0\rangle$ は上向きの spin 状態、 $|1\rangle$ は下向きの spin 状態をあらわす。この量子もつれの状態を記述する2つのケットの一方 $|\cdot\rangle_A$ を Alice が、もう一方 $|\cdot\rangle_B$ を Bob がもつとする。いま Alice は Bob にテレポーテーションさせたい状態ベクトル

$$\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A \quad (2.13)$$

をもつ。この状態ベクトルと Alice のもつ量子もつれの状態の片割れを合わせると、全体の状態ベクトルは、

$$(\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B) \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|00\rangle_A|0\rangle_B + \alpha|01\rangle_A|1\rangle_B + \beta|10\rangle_A|0\rangle_B + \beta|11\rangle_A|1\rangle_B) \quad (2.15)$$

である。

まず Alice は自分が保持する状態ベクトルに Unitary 変換

$$|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11| \quad (2.16)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

を作用させる。式 (2.15) は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|00\rangle_A|0\rangle_B + \alpha|01\rangle_A|1\rangle_B + \beta|11\rangle_A|0\rangle_B + \beta|10\rangle_A|1\rangle_B) \quad (2.18)$$

となる。次に送りたい状態ベクトルに Hadamard 変換とよばれる Unitary 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

を作用させる。式 (2.18) は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(|0\rangle_A + |1\rangle_A)|0\rangle_B + \alpha(|0\rangle_A + |1\rangle_A)|1\rangle_B + \beta(|0\rangle_A - |1\rangle_A)|1\rangle_B \\ & + \beta(|0\rangle_A - |1\rangle_A)|0\rangle_B) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(|00\rangle_A + |10\rangle_A)|0\rangle_B + \alpha(|01\rangle_A + |11\rangle_A)|1\rangle_B \\ & + \beta(|01\rangle_A - |11\rangle_A)|0\rangle_B + \beta(|00\rangle_A - |10\rangle_A)|1\rangle_B) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_A(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) + |01\rangle_A(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \\ & + |10\rangle_A(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) + |11\rangle_A(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。よって観測の結果、Alice のもつ状態は $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ の4つの内のいずれかになる。このとき Alice の観測結果に応じて、Bob のもつ状態も4つ

$$|00\rangle_A \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \quad (2.24)$$

$$|01\rangle_A \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \quad (2.25)$$

$$|10\rangle_A \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \quad (2.26)$$

$$|11\rangle_A \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \quad (2.27)$$

のうちのいずれかとなる。したがって Alice が自らの観測結果を Bob に伝えることで、Bob は自らがもつ状態を「確定」することができる。このとき伝達的手段は古典的であるため、「情報」のやり取りの速さは光速を上限とする。Alice の観測結果から、Bob は自分のもつ状態ベクトルに対して、その状態に応じた Unitary 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

を作用させることで、状態ベクトル $\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ をえる。こうして Alice がもっていた状態ベクトル $\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ を係数ごと Bob の元へと $\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ としてテレポーテーションさせることができた。

このように今日では、量子力学のパラダイムを情報理論に適用した量子情報理論において、量子もつれは「資源」となっている。量子もつれを記述する物理的実態として spin や偏光をもちいることができる。しかし、spin や偏光は座標系のとり方に依存する量である。したがって量子もつれを記述する座標系について Alice と Bob が示し合わせていないと、量子もつれの記述が Alice と Bob で異なるため、量子テレポーテーションのプロセスは機能しなくなる。後の節では、動いている座標系を導入することで特殊相対論的速度領域において、量子もつれが非自明な座標変換の影響をうけることを Bell の不等式をもちいて解説する。

3. Wigner 回転

3.1 状態ベクトルの Lorentz 変換と Wigner 回転

微小距離が、

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

で与えられる 4 次元空間を Minkowski 時空とよぶ。 t は時間成分であり、 (x, y, z) は空間成分である。Minkowski 時空における座標変換は Lorentz 変換とよばれている。特にある慣性系から動いている慣性系へに移る変換は Boost 変換という。Boost 変換の「大きさ」をあらわす量は rapidity とよばれており、慣性系の速度に対応する量である。また実空間の回転変換と比較すると rapidity は座標軸の回転角度に相当する。しばしば Lorentz 変換と Boost 変換は同義にあつかわれることになり、本稿では Lorentz 変換と Boost 変換の区別はしない。量子力学において Schrödinger 方程式は Lorentz 不変ではない。しかし状態ベクトルは Lorentz 変換の Unitary 表現にしたがい変換される。Lorentz 変換の Unitary 表現は以下の交換関係を満たす生成子によって表現される。

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad (3.2)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad (3.3)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \quad (3.4)$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k \quad (3.5)$$

$$[K_i, P_j] = iH\delta_{ij} \quad (3.6)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0 \quad (3.7)$$

$$[K_i, H] = iP_i \quad (3.8)$$

これらは Poincaré 代数とよばれている。ここで、 J_i は角運動量演算子、 H は静止質量エネルギーを含んだ Hamilton 演算子、 K_i は Boost 演算子であり、添え字は空間成分 (x, y, z) をあらわす。 ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。

4 元運動量 p^μ と spin 自由度 σ をもつ 1 質量粒子の状態ベクトルとして、

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle \quad (3.9)$$

$$S_z |k, \sigma\rangle = \sigma |k, \sigma\rangle \quad (3.10)$$

を考える。ここで P^μ は 4 元運動量演算子であり、 S_z は z 成分の spin 演算子である。また、 $k^\mu = \{m, 0, 0, 0\}$ は静止質量を m とする粒子の静止系での 4 元運動量である。 $|p, \sigma\rangle$ と $|k, \sigma\rangle$ の関係は Boost 変換 $L(p)$ に対応する Unitary 変換 $U(L(p))$ をもちいることにより、

$$|p, \sigma\rangle = N(p) U(L(p)) |k, \sigma\rangle \quad (3.11)$$

と記述される。ここで、 $N(p)$ は規格化定数である。

$|p, \sigma\rangle$ に Boost 変換 Λ に対応する Unitary 変換 $U(\Lambda)$ を作用させることで、 Λ によって Boost された座標系での状態ベクトルをえる。

$$\begin{aligned}
U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(\Lambda) [N(p) U(L(p)) |k, \sigma\rangle] \\
&= N(p) U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \\
&= N(p) [U(L(\Lambda p)) U^{-1}(L(\Lambda p))] U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \\
&= N(p) U(L(\Lambda p)) U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで、

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) \text{ and } (\Lambda p)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \tag{3.13}$$

とする。質量粒子の場合、 $W(\Lambda, p)$ は回転変換となり Wigner 回転とよばれる。Galilei 変換における Boost 変換は時間成分には影響を及ぼさない。しかし Lorentz 変換における Boost 変換は時間成分にも影響を及ぼす。その結果、式 (3.13) のように Boost 変換を繰り返すことで回転変換になるという非自明な効果が生まれる。そのため4元運動量と結びつけられた spin 状態に影響を及ぼす。

式 (3.12) は粒子の静止系における spin 状態に関して、

$$\begin{aligned}
U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= N(p) U(L(\Lambda p)) \sum_{\sigma'} |k, \sigma'\rangle \langle k, \sigma' | U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle \\
&= N(p) \sum_{\sigma'} \langle k, \sigma' | U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle U(L(\Lambda p)) |k, \sigma'\rangle \\
&= \frac{N(p)}{N(\Lambda, p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma', \sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'\rangle
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。ここで、

$$D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) = \langle k, \sigma' | U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle \tag{3.15}$$

とした。

spin は静止系で定義されている。したがって、運動している粒子を得るためには、静止系で定義された状態に Boost 変換を1回作用させることになる。さらに、その運動している粒子の状態ベクトルを別の動いている座標系で記述するためには、2回目の Boost 変換が必要となる。結果、質量粒子は運動量が変わるだけでなく、ある座標系では単一の spin の固有状態で記述できたとしても別の座標系では一般に spin 状態が混じることになる。

以下の議論において、規格化定数 $N(p)$, $N(\Lambda, p)$ 及び $\frac{N(p)}{N(\Lambda, p)}$ は結論に影響しないため省略する。

3.2 Wigner 回転による spin-singlet 状態の変換

「座標系 I」で以下のように定義された状態ベクトル

$$|\varphi_p(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|p(\theta), \uparrow\rangle |p(\theta + \pi), \downarrow\rangle - |p(\theta), \downarrow\rangle |p(\theta + \pi), \uparrow\rangle \right) \tag{3.16}$$

を座標系 I に対して動いている「座標系 II」で記述したときの Wigner 回転による spin 状態

の係数を求める。ここで、 $p(\theta) = \{p^0, p \cos \theta, 0, p \sin \theta\}$ 、 $p(\theta + \pi) = \{p^0, -p \cos \theta, 0, -p \sin \theta\}$ である。上向きと下向きの矢印は spin の z 成分をあらわす。

状態ベクトル (式 (3.16)) を座標系 I に対して動いている座標系 II で記述することを考える。このため式 (3.16) に Lorentz 変換 $U(\Lambda)$ を作用させる。その結果、spin 状態に対して各々の 4 元運動量に依存した Wigner 回転が作用する。いま質量粒子の速度を v とすると質量粒子の rapidity は $\phi = \tanh^{-1} v$ となる。また座標系 I と座標系 II の相対速度を V とすると対応する rapidity は $\alpha = \tanh^{-1} V$ となる。ただし、 $\alpha, \phi > 0$ とする。この rapidity α と ϕ をもちいることで、 $\text{spin} \frac{1}{2}$ の質量粒子の Wigner 回転は一般に次のように行列で表現される。[10]

$$D(W(\Lambda, p)) = \frac{1}{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh \alpha \cosh \phi + \frac{1}{2} \sinh \alpha \sinh \phi (\hat{e} \cdot \hat{p}) \right]^{\frac{1}{2}}} \times \left\{ \left[\cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\phi}{2} + \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\phi}{2} (\hat{e} \cdot \hat{p}) \right] I + i \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\phi}{2} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \right\} \quad (3.17)$$

ここで、 i は虚数単位、 I は恒等行列表であり、 $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ は Pauli 行列表である。また \hat{p} は座標系 I における粒子の運動方向であり、 \hat{n} は $\hat{n} \equiv \hat{e} \times \hat{p}$ で定義され \hat{e} は座標系 II における座標系 I の移動方向である。

後に掲示するモデルのため $\hat{p} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$ かつ $\hat{e} = (0, 0, -1)$ とする。このとき、Wigner 回転の行列表現は、

$$D(W(\phi, \alpha, \theta)) = \begin{pmatrix} A(\phi, \alpha, \theta) & -B(\phi, \alpha, \theta) \\ B(\phi, \alpha, \theta) & A(\phi, \alpha, \theta) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

となる。ここで、

$$A(\phi, \alpha, \theta) = \frac{\cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\phi}{2} - \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\phi}{2} \sin \theta}{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh \alpha \cosh \phi - \frac{1}{2} \sinh \alpha \sinh \phi \sin \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.19)$$

$$B(\phi, \alpha, \theta) = \frac{\sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\phi}{2}}{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh \alpha \cosh \phi - \frac{1}{2} \sinh \alpha \sinh \phi \sin \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \cos \theta \quad (3.20)$$

である。したがって、

$$U(\Lambda) |\varphi_p(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_{\Lambda p}(\theta) \left(|\Lambda p(\theta), \uparrow\rangle |\Lambda p(\theta + \pi), \downarrow\rangle - |\Lambda p(\theta), \downarrow\rangle |\Lambda p(\theta + \pi), \uparrow\rangle \right) + b_{\Lambda p}(\theta) \left(|\Lambda p(\theta), \uparrow\rangle |\Lambda p(\theta + \pi), \uparrow\rangle + |\Lambda p(\theta), \downarrow\rangle |\Lambda p(\theta + \pi), \downarrow\rangle \right) \right] \quad (3.21)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
a_{\Lambda p}(\theta) &= A(\phi, \alpha, \theta)A(\phi, \alpha, \theta + \pi) + B(\phi, \alpha, \theta)B(\phi, \alpha, \theta + \pi) \\
&= \frac{\cosh \alpha + \cosh \phi}{\left[(1 + \cosh \alpha \cosh \phi)^2 - \sinh^2 \alpha \sinh^2 \phi \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{\Lambda p}(\theta) &= B(\phi, \alpha, \theta)A(\phi, \alpha, \theta + \pi) - A(\phi, \alpha, \theta)B(\phi, \alpha, \theta + \pi) \\
&= \frac{\sinh \alpha \sinh \phi}{\left[(1 + \cosh \alpha \cosh \phi)^2 - \sinh^2 \alpha \sinh^2 \phi \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \cos \theta \quad (3.23)
\end{aligned}$$

であり、 $|a_{\Lambda p}(\theta)|^2 + |b_{\Lambda p}(\theta)|^2 = 1$ を満たす。また、表記の簡略化のために $a(\phi, \alpha, \theta)$, $b(\phi, \alpha, \theta)$ の代わりに $a_{\Lambda p}(\theta)$, $b_{\Lambda p}(\theta)$ とした。式 (3.22) 及び式 (3.23) は $v = \tanh \phi$ と α をもちいると、

$$a_{\Lambda p}(\theta) = \frac{1 + \sqrt{1 - v^2} \cosh \alpha}{\left[\left(\sqrt{1 - v^2} + \cosh \alpha \right)^2 - v^2 \sinh^2 \alpha \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.24)$$

$$b_{\Lambda p}(\theta) = \frac{v \sinh \alpha}{\left[\left(\sqrt{1 - v^2} + \cosh \alpha \right)^2 - v^2 \sinh^2 \alpha \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}} \cos \theta \quad (3.25)$$

と記述できる。また、式 (3.22) 及び式 (3.23) が α と ϕ の入れ換えに対して対称であることから、式 (3.24) 及び式 (3.25) において $v \rightarrow V$, $\alpha \rightarrow \phi$ と置き換えることで、 $a_{\Lambda p}(\theta)$ 及び $b_{\Lambda p}(\theta)$ を $V = \tanh \alpha$ と ϕ で記述できる。式 (3.21) より、座標系 I において spin-singlet 状態だった状態ベクトルは座標系 II において spin-singlet 状態と spin-triplet 状態の重ね合わせとなることがわかる。非相対論的極限 $v \rightarrow 0$ では、式 (3.24) 及び式 (3.25) は、

$$a_{\Lambda p}(\theta) = 1 - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \theta \tanh^2 \frac{\alpha}{2} + O(v^3) \quad (3.26)$$

$$b_{\Lambda p}(\theta) = v \cos \theta \tanh \frac{\alpha}{2} + O(v^3) \quad (3.27)$$

となり、相対論的効果として spin-triplet 状態が混じっていくことを見て取ることができる。一方、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $a_{\Lambda p}(\frac{\pi}{2}) = 1$, $b_{\Lambda p}(\frac{\pi}{2}) = 0$ となるため座標系 II でも恒等的に spin-singlet 状態となる。

$$U(\Lambda) |\varphi_p(\frac{\pi}{2})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Lambda p(\frac{\pi}{2}), \uparrow\rangle |\Lambda p(\frac{\pi}{2} + \pi), \downarrow\rangle - |\Lambda p(\frac{\pi}{2}), \downarrow\rangle |\Lambda p(\frac{\pi}{2} + \pi), \uparrow\rangle) \quad (3.28)$$

次に、質量粒子の速度を $v \rightarrow 1$ 、座標系の相対速度を $V \rightarrow 1$ とする超相対論的極限を考える。このとき、 $a_{\Lambda p}(\theta) \rightarrow 0$, $b_{\Lambda p}(\theta) \rightarrow 1$ ($\theta < \frac{\pi}{2}$) または $b_{\Lambda p}(\theta) \rightarrow -1$ ($\theta > \frac{\pi}{2}$) となり、座標系 II において状態ベクトルは $S_z = +1$ と $S_z = -1$ の spin-triplet 状態が重ね合わさった状態へと収束する。

$$U(\Lambda)|\varphi_p(\theta)\rangle \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(|\Lambda p(\theta), \uparrow\rangle |\Lambda p(\theta + \pi), \uparrow\rangle + |\Lambda p(\theta), \downarrow\rangle |\Lambda p(\theta + \pi), \downarrow\rangle \right) \quad (3.29)$$

ここで β は $\theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $+1$ 、 $\theta > \frac{\pi}{2}$ のとき -1 である。以後、この状態を単に「spin-triplet 状態」と呼称する。この「spin-triplet 状態」は「spin-singlet 状態」と同様に Bell 状態の1つである。

3.3 Wigner 回転の角度

Wigner 回転は量子論的效果ではなく特殊相対論に由来する古典的效果であり、実空間の物理的な回転変換である。 $\hat{p} = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$ かつ $\hat{e} = (0, 0, -1)$ という条件の下、Wigner 回転による回転角度 $\delta(\theta)$ を以下のように求める。

式 (3.18) であらわされる Wigner 回転は y 軸まわりの回転変換の Unitary 表現でもある。したがって、

$$\cos \frac{\delta(\theta)}{2} = A(\phi, \alpha, \theta) \quad (3.30)$$

$$\sin \frac{\delta(\theta)}{2} = B(\phi, \alpha, \theta) \quad (3.31)$$

である。このことから、

$$\delta(\theta) = 2 \tan^{-1} \frac{\sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\phi}{2} \cos \theta}{\cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\phi}{2} - \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\phi}{2} \sin \theta} \quad (3.32)$$

となる。

また式 (3.30) 及び式 (3.31) をもちいて式 (3.22) 及び式 (3.23) を表現すると、

$$\begin{aligned} a_{\Lambda p}(\theta) &= \cos \frac{\delta(\theta) - \delta(\theta + \pi)}{2} \\ b_{\Lambda p}(\theta) &= \sin \frac{\delta(\theta) - \delta(\theta + \pi)}{2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。特に $\theta = 0$ のとき、 $\delta(\pi) = -\delta(0)$ であるため、 $a_{\Lambda p}(0) = \cos \delta(0)$ 、 $b_{\Lambda p}(0) = \sin \delta(0)$ となる。このとき、

$$\delta(0) = \tan^{-1} \frac{\sinh \alpha \sinh \phi}{\cosh \alpha + \cosh \phi} \quad (3.34)$$

である。したがって、 $\phi = 0$ もしくは $\alpha = 0$ のとき $\delta(0) = 0$ となる。これは粒子もしくは観測者が静止している状態に相当する。 $\phi \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ の極限では、Wigner 角 $\delta(0) \rightarrow \frac{\phi\alpha}{2}$ となる。逆に、 $\phi, \alpha \rightarrow \infty$ のときは $\delta(0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ である。

3.3.1 Wigner 回転の物理的描像

いま座標系 I に「 $\text{spin } \frac{1}{2}$ の質量粒子を発生される装置」が置いてあるとする。「質量粒子発生装置」から放たれた質量粒子は、速度 v すなわち rapidity ϕ で $(1, 0, 0)$ 方向に、4 元運動量

$$p^\mu = (m \cosh \phi, m \sinh \phi, 0, 0)$$

で動いている。このとき Boost 変換の影響で x 軸の「目盛り」は異なるものの、質量粒子の静止系の 3 次元空間座標軸と座標系 I の 3 次元空間座標軸は平行である。ここに spin の測定装置をもった観測者を導入する。この観測者は、座標系 I の $(0, 0, 1)$ 方向に、速度 V 、rapidity α で移動している。この観測者の系と座標系 I の 3 次元空間座標軸は、常に平行である。質量粒子の運動を観測者が「みる」場合、Lorentz 変換 Λ^μ_ν を質量粒子の 4 元運動量 p^μ に作用させることになる。この結果、観測者の系（座標系 II）では質量粒子の 3 元運動量 $\vec{\Lambda p}$ は次のようになる。

$$\vec{\Lambda p} = (m \sinh \phi, 0, -m \cosh \phi \sinh \alpha)$$

したがって、座標系 I から観測者の系への変換は、質量粒子の 3 元運動量の方角をかえる。「観測者の系から質量粒子の静止系を求める」ためには、Lorentz 変換 $L^{-1}(\Lambda p)$ を観測者の系における質量粒子の 4 元運動量 Λp に作用させることになる。その結果、質量粒子の静止系をえる。したがって、粒子の静止運動量に対する Lorentz 変換の作用は $L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)$ となり、Wigner 回転の効果を考慮しなければならなくなる（図 2 参照）。

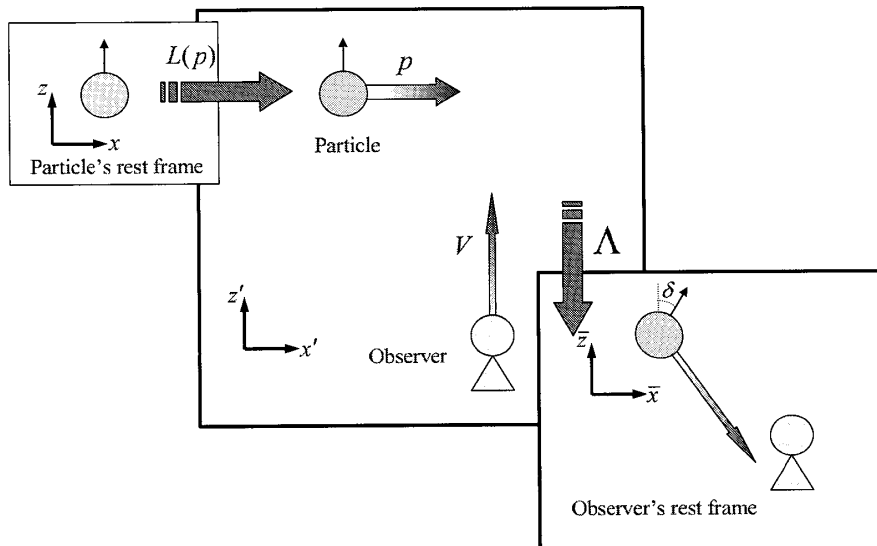


図 2: ある座標系において速度 V で移動している観測者が 4 元運動量 p をもつ $\text{spin } \frac{1}{2}$ の質量粒子を測定する。Wigner 回転のため、観測者の静止系では粒子の spin は進行方向に δ だけ傾く。

非相対論では、観測者の系から質量粒子の静止系を求めたとき、その静止系は元の座標系における質量粒子の静止系と「同じ」である。しかし、相対論をもちいて観測者の系から質量粒子の静止系を求めた場合、Wigner回転の効果により、観測者の系から「みた」質量粒子の静止系は y 軸 $(0, 1, 0)$ 方向を回転軸として $\delta(0)$ だけ傾く。このことは、「座標系I」からえられる質量粒子の静止系の z 軸は、「観測者の系」からえられる質量粒子の静止系の z 軸に対して、「 x 軸方向に $\delta(0)$ だけ傾く」ことを意味する。したがって、座標系Iから「みる」質量粒子の静止系と観測者の系から「みる」質量粒子の静止系は「異なる」ことになる。これは「非相対論領域」で培われた「人間の直感」では決して得られることのない効果である。

このWigner回転による座標軸の傾きは、次のように考察することが出来る。観測者の系では質量粒子の運動方向は、座標系I及び観測者の系の x 軸に対して $(0, 0, -1)$ 方向に、次のように与えられる角度 δ_p だけ傾いている。

$$\tan \delta_p = \frac{\left| \frac{(\vec{\Lambda}p)^3}{(\Lambda p)^1} \right|}{\left| \frac{(\vec{\Lambda}p)^1}{(\Lambda p)^1} \right|} = \frac{\sinh \alpha}{\tanh \phi} \quad (3.35)$$

このときWigner角 $\delta(0)$ と δ_p の関係は、 $\delta(0) \leq \delta_p$ である。このことからWigner回転は、3元運動量方向の変換に伴い「座標軸が傾いた」とみなせられる。Wigner角 $\delta(0)$ は、 $\phi \rightarrow \infty$ 且つ $\alpha \rightarrow \infty$ のとき最大となり、その値は $\delta(0) = \frac{\pi}{2}$ である。非相対論的領域では、 $v, V \rightarrow 0$ という極限をとることになるので、 $\phi \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ となり $\delta(0) \rightarrow 0$ となる。したがって、この領域では、Wigner回転という「現象」は存在を認知されなくなり、「人間の直感」通りに世界は成り立っていることが示される。

以上のことから、「光速に近い速度で移動している粒子」に対して「光速に近い速度で移動している観測者」が粒子の運動方向とは別の方向で近づきspinを測定したとする。このときWigner回転の影響のためspin状態の「混じり合い」が相対論的速度領域では顕著に現れ、その結果、座標系Iでのspin測定と観測者の静止系でのspin測定では期待値が異なることになる。したがって、Wigner回転を考慮にいれなければならない状況で「量子もつれ状態」のspinの「相関」を測ると「相関の期待値」が変わる。このことを次の節で述べる。

4. 回転によるEPR相関の変化

4.1 Wigner回転の影響を受けたBellの不等式

座標系Iにおいて、個々のspinが $|\frac{1}{2}|$ で、total-spinが0の「もつれた状態」にある2つの質量粒子が x 軸にそって互いに離れていくとする。この座標系でのspin-singlet状態は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|p_+, \uparrow\rangle |p_-, \downarrow\rangle - |p_+, \downarrow\rangle |p_-, \uparrow\rangle \right] \quad (4.1)$$

と記述される。ここで、2つの質量粒子の4元運動量は、

$$p_{\pm}^{\mu} = (m \cosh \phi, \pm m \sinh \phi, 0, 0) \quad (4.2)$$

である。この座標系で、 z 軸にそって $(0, 0, 1)$ 方向に同じ向き、同じ速度で移動している2人の観測者が spin の測定をおこなうとする。2人の観測者が静止している系では、Wigner回転の効果のために、 spin-singlet 状態は spin-triplet 状態と混じる。

$$\begin{aligned} U(\Lambda) \otimes U(\Lambda) |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [U(\Lambda) |p_+, \uparrow\rangle U(\Lambda) |p_-, \downarrow\rangle - U(\Lambda) |p_+, \downarrow\rangle U(\Lambda) |p_-, \uparrow\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \delta (|\Lambda p_+, \uparrow\rangle |\Lambda p_-, \downarrow\rangle - |\Lambda p_+, \downarrow\rangle |\Lambda p_-, \uparrow\rangle) \\ &\quad + \sin \delta (|\Lambda p_+, \uparrow\rangle |\Lambda p_-, \uparrow\rangle + |\Lambda p_+, \downarrow\rangle |\Lambda p_-, \downarrow\rangle)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで式 (3.21) 及び式 (3.33) もちいた。ただし $\delta = \delta(0)$ とした。

4元運動量 p に依存する spin 演算子 $\sigma_x(p), \sigma_y(p), \sigma_z(p)$ を定義する(係数 $\frac{1}{2}$ を省略している)。

$$\sigma_x(p) = \frac{1}{C(p)} \{ |p, \uparrow\rangle \langle p, \downarrow| + |p, \downarrow\rangle \langle p, \uparrow| \} \quad (4.4)$$

$$\sigma_y(p) = \frac{1}{C(p)} \{ -i |p, \uparrow\rangle \langle p, \downarrow| + i |p, \downarrow\rangle \langle p, \uparrow| \} \quad (4.5)$$

$$\sigma_z(p) = \frac{1}{C(p)} \{ |p, \uparrow\rangle \langle p, \uparrow| - |p, \downarrow\rangle \langle p, \downarrow| \} \quad (4.6)$$

ここで、 $C(p)$ は規格化のための数因子で、

$$C(p) = \langle p, \uparrow | p, \uparrow \rangle = \langle p, \downarrow | p, \downarrow \rangle \quad (4.7)$$

を満たす。これらの演算子は運動量 p に依存するPauli行列として、状態ベクトル $|p, \uparrow\rangle$ 及び $|p, \downarrow\rangle$ に作用する。例えば、

$$\sigma_z(p) |p, \uparrow\rangle = |p, \uparrow\rangle \quad (4.8)$$

$$\sigma_z(p) |p, \downarrow\rangle = -|p, \downarrow\rangle \quad (4.9)$$

$$\sigma_x(p) |p, \uparrow\rangle = |p, \downarrow\rangle \quad (4.10)$$

である。

次にBellの不等式における相関の期待値を計算する。測定角度 θ を z 軸から y 軸への角度として定義することで、 x 軸まわりの任意の角度での spin 演算子

$$\begin{aligned} \sigma_z(p, \theta) &= U_x(\theta) \sigma_y(p) U_x^\dagger(\theta) \\ &= -\sin \theta \sigma_y(p) + \cos \theta \sigma_z(p) \end{aligned} \quad (4.11)$$

をえる。よって、観測者に測定される相関の期待値は、

$$\begin{aligned}
E(a, b) &= \langle \psi' | \sigma_z(p, a) \otimes \sigma_z(p, b) | \psi' \rangle \\
&= -[\cos(a - b) \cos^2 \delta - \cos(a + b) \sin^2 \delta]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$= -[\cos 2\delta \cos a \cos b + \sin a \sin b] \tag{4.13}$$

となる。ここで $|\psi'\rangle = U(\Lambda) \otimes U(\Lambda) |\psi\rangle$ である。したがって、相関関数（式（2.5））は、

$$\begin{aligned}
&E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b') \\
&= -[\cos(a - b) + \cos(a' - b) + \cos(a - b') - \cos(a' - b')] \cos^2 \delta \\
&\quad + [\cos(a + b) + \cos(a' + b) + \cos(a + b') - \cos(a' + b')] \sin^2 \delta
\end{aligned} \tag{4.14}$$

となる。

元の座標系では、Bell の不等式の破れが最大となる角度設定は $a = \frac{\pi}{2}$, $a' = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $b' = \frac{3\pi}{4}$ である。この角度設定をもちいて、観測者の系における Bell の不等式（式（2.8））の左辺を計算する。以後、この設定による Bell の不等式の左辺を Bell 相関とよぶ。

$$\begin{aligned}
&|E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b')| \\
&= | -[\cos(a - b) + \cos(a' - b) + \cos(a - b') - \cos(a' - b')] \cos^2 \delta \\
&\quad + [\cos(a + b) + \cos(a' + b) + \cos(a + b') - \cos(a' + b')] \sin^2 \delta | \\
&= | -\left[\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right] \cos^2 \delta \\
&\quad + \left[\cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right] \sin^2 \delta | \\
&= | -\frac{4}{\sqrt{2}} \cos^2 \delta | = 2\sqrt{2} \cos^2 \delta
\end{aligned} \tag{4.15}$$

したがって、Wigner 回転の影響を考慮にいれなければならない状況で spin の相関を測定した場合、Bell 相関は $\cos^2 \delta$ の補正がかかることになる。

4.2 観測者の静止系と EPR 相関

観測者によって測られた Bell 相関は Wigner 角 δ の補正を受ける。 δ は式（3.34）のように粒子及び観測者の速度 ϕ と α に依存しており、速度とともに増加する。したがって、 $\cos^2 \delta$ は速度とともに減少する量である。このため、Bell の不等式は速度が増加するにつれて $2\sqrt{2}$ から減少し、速度が光速となる $v = V = 1$ のとき、 $\delta = \frac{\pi}{2}$ となるため、Bell 相関は 0 となる。また、この極限のとき式（4.12）から、観測者が測定する相関の期待値は、

$$E_{\delta=\pi/2}(a, b) = \cos(a + b) \tag{4.16}$$

となる。逆に δ が $\delta \ll 1$ のとき、すなわち質量粒子と観測者の速度が非相対論的極限の場合、式（4.13）から観測者が測定する相関の期待値は δ が 2 次までの範囲で、

$$E_{\delta \ll 1}(a, b) = -\cos(a - b) + 2\delta^2 \cos a \cos b \tag{4.17}$$

となる。このとき相関関数は、

$$\begin{aligned}
 & E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b') \\
 &= -[\cos(a - b) + \cos(a' - b) + \cos(a - b') - \cos(a' - b')] \\
 & \quad + 2\delta^2 [\cos a \cos b + \cos a' \cos b + \cos a \cos b' - \cos a' \cos b']
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

である。したがって非相対論的極限場合、観測者の系における Bell の不等式は、角度設定 $a = \frac{\pi}{2}, a' = 0, b = \frac{\pi}{4}, b' = \frac{3\pi}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned}
 & |E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b')| \\
 &= -[\cos(a - b) + \cos(a' - b) + \cos(a - b') - \cos(a' - b')] \\
 & \quad + 2\delta^2 [\cos a \cos b + \cos a' \cos b + \cos a \cos b' - \cos a' \cos b'] \\
 &= \left| -\left[\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4}\right] \right. \\
 & \quad \left. + 2\delta^2 \left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4}\right] \right| \\
 &= \left| -\frac{4}{\sqrt{2}} + 2\delta^2 \frac{2}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}(1 - \delta^2)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

のため、 $2\sqrt{2}$ から $2\sqrt{2}\delta^2$ だけ減少する。

4.3 特殊相対論的領域での EPR 相関

以上のことから、Bell の不等式は Lorentz 不変ではない、すなわち相対論的変換の下では不変ではないことがわかる。このことは、「量子もつれ」の状態が座標系によって異なることを意味する。このため、あたかも局在性を仮定した Bell の不等式が成立したかのように見える。しかし、式 (4.3) は次のように書き換えることが可能である。

$$\begin{aligned}
 |\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [& |\Lambda p_+, \uparrow\rangle \otimes (\sin \delta |\Lambda p_-, \uparrow\rangle + \cos \delta |\Lambda p_-, \downarrow\rangle) \\
 & - |\Lambda p_+, \downarrow\rangle \otimes (\cos \delta |\Lambda p_-, \uparrow\rangle - \sin \delta |\Lambda p_-, \downarrow\rangle)]
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

式 (4.3) では spin-singlet 状態と spin-triplet 状態が「混じり合った」状態と解釈できる。しかし、 $|\Lambda p_+\rangle$ による基底と $|\Lambda p_-\rangle$ による基底に分けて書き下せば、Wigner 回転による座標系の変換を考慮にいった spin-singlet 状態とみなすことも可能となる。このことは、Wigner 角 δ による補正を考慮すれば、Bell の不等式の「破れ」は依然として $2\sqrt{2}$ が最大であることを意味する。

5 EPR モデルの拡張と spin 相関のエントロピー

5.1 EPR モデルの拡張

長い間、EPR パラドックスは、1つの粒子が2つの粒子の対に分裂するというモデルをもちいて語られてきた。このとき粒子対の状態は単一の量子もつれの状態として準備されてきた。これまでのモデルに対して、分裂した後の状態を「複数の粒子対状態による重ね合わせ」として準備する、という拡張をおこなう。以下では、この重ね合わせ状態に

関する spin 相関について議論する。ある座標系 I において $\text{spin}\frac{1}{2}$ の質量をもった粒子対がなす spin-singlet 状態は

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p, \uparrow\rangle|q, \downarrow\rangle - |p, \downarrow\rangle|q, \uparrow\rangle) \quad (5.1)$$

と記述される。ここで、 p 及び q は、粒子対の各 4 元運動量である。

いま状態を複数の「spin-singlet 状態をなす粒子対状態」 $|\varphi_i\rangle$ ($i=1, 2, \dots$) の重ね合わせとして準備する。この状態は各々の粒子対の 4 元運動量の組 $\{p, q\}_i$ の重ね合わせとなる。粒子の質量は全て等しいとする。したがって、4 元運動量は 3 元運動量の絶対値 p とその方向 \hat{p} によってあらわされる。そのため、 $\{p, q\}_i$ は、 $\{(p_0, p\hat{p}), (p_0, -p\hat{p})\}_i$ となる。よって、複数の粒子対状態による重ね合わせは

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\varphi_i\rangle, (\sum_i |c_i|^2 = 1) \quad (5.2)$$

となる。いままで使われてきたモデルは、 $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ に一致する。 $i=1, 2, 3$ の場合を図 3 に示す。

以下では簡便のため、主に 2 つの粒子対状態の重ね合わせ ($i=1, 2$) を考える。Wigner 回転の効果을強調するため、粒子対の運動は $x-z$ 面上に固定し z 軸に沿って移動している別の座標系 II を導入する。粒子対 i の方向を x 軸から z 軸への角度 θ_i であらわす。したがって、状態ベクトル $|\varphi_i\rangle$ は次のようになる。

$$|\varphi_i\rangle = |\varphi_p(\theta_i)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p(\theta_i), \uparrow\rangle|p(\theta_i + \pi), \downarrow\rangle - |p(\theta_i), \downarrow\rangle|p(\theta_i + \pi), \uparrow\rangle) \quad (5.3)$$

分裂後の 2 つの粒子対状態の重ね合わせは、

$$|\psi_p(\theta_1, \theta_2)\rangle = c_1 |\varphi_p(\theta_1)\rangle + c_2 |\varphi_p(\theta_2)\rangle \quad (5.4)$$

となる。

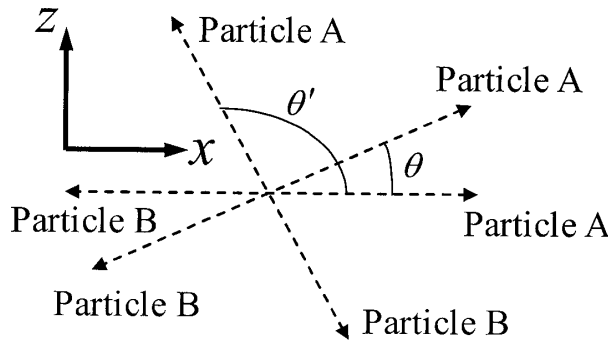


図 3: 粒子対状態の重ね合わせが $i=1, 2, 3$ の場合。

この状態ベクトルを座標系 I と Boost 変換 Λ で結ばれた座標系 II で考える。式 (3.15) における Wigner 回転の係数は、 Λ だけでなく粒子の 4 元運動量にも依存する。Unitary 変換 $U(\Lambda)$ を作用させることで、座標系 II の状態ベクトルは次のようになる。

$$U(\Lambda)|\psi_p(\theta_1, \theta_2)\rangle = c_1 U(\Lambda)|\varphi_p(\theta_1)\rangle + c_2 U(\Lambda)|\varphi_p(\theta_2)\rangle \quad (5.5)$$

この拡張したモデルに対応する物理的状況として以下の状況を考える。座標系 II に対応する実験室系において、1 つの親粒子が z 軸の負方向に運動しているとする。この粒子はあるとき、2 つの粒子に分裂する。このとき、分裂方向は粒子対の重心系で θ_1 と θ_2 、2 つ方向をとる可能性があるとする。したがって、状態ベクトルは運動方向を 2 つに類別された粒子対状態の重ね合わせとなる。粒子対の重心系は座標系 I に対応し、この座標系は実験室系での z 方向に対する Boost 変換 Λ^{-1} から得られる。実験室系での状態ベクトルは式 (5.5) で、重心系での状態ベクトルは式 (5.3) であらわされる。このとき、各粒子の静止系の z 軸は Wigner 回転のため実験室系の z 軸に対して傾いている。

5.2 実験室系における spin 相関の von Neumann のエントロピー

重心系における状態ベクトル

$$|\psi_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots)\rangle = \sum_i c_i |\varphi_p(\theta_i)\rangle, \quad \sum_i |c_i|^2 = 1 \quad (5.6)$$

及び Unitary 変換 $U(\Lambda)$ から、実験室系における密度行列は次のように表現できる。

$$\rho_{\Lambda p}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots) = U(\Lambda) |\psi_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots)\rangle \langle \psi_p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots) | U^\dagger(\Lambda) \quad (5.7)$$

4 元運動量について trace をとることで、縮約した密度行列

$$\rho'_{\Lambda p}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots) = \sum_i p_i M_{\Lambda p}(\theta_i) \quad (5.8)$$

$$p_i = |c_i|^2 \quad (5.9)$$

$$M_{\Lambda p}(\theta_i) = \text{Tr}_{4m}[U(\Lambda) |\varphi_p(\theta_i)\rangle \langle \varphi_p(\theta_i) | U^\dagger(\Lambda)] \quad (5.10)$$

を得る。ここで $\text{Tr}_{4m}[\cdot]$ は 4 元運動量部分に対する trace をあらわす。この trace の値は Λp 及び p に依存する。これは trace が任意の運動量から Λp と p を取り出すという操作に対応しており、この取り出された Λp と p をパラメータとして縮約した密度行列はあらわされるためである (Appendix B 参照)。

縮約した密度行列 (5.8) から、von Neumann のエントロピーを次のよう計算する。

$$S(\phi, \alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots) = -\text{Tr}[\rho'_{\Lambda p}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots) \log \rho'_{\Lambda p}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots)] \quad (5.11)$$

ここで、「trace をとる」ということは、4 元運動量と spin の結びつきを無視することを意味する。重心系では縮約した密度行列が純粋状態であることから、von Neumann のエント

ロピーは常に0である。以後、 $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ に対する spin 状態のエントロピーについて議論する。

以下では、粒子対状態が2つという簡単な場合について考える。また、 $\theta_1=0$ 及び $\theta_2=\theta$ とする。このとき

$$|\psi_p(0, \theta)\rangle = c_1 |\varphi_p(0)\rangle + c_2 |\varphi_p(\theta)\rangle \quad (5.12)$$

$$\rho'_{\Lambda p}(0, \theta) = p_1 M_{\Lambda p}(0) + p_2 M_{\Lambda p}(\theta) \quad (5.13)$$

から、von Neumann のエントロピーは

$$S(\phi, \alpha, 0, \theta) = -\text{Tr}[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta) \log \rho'_{\Lambda p}(0, \theta)] \quad (5.14)$$

となる。

Mathematica をもちいて S に関する上述の式を数値的に計算した。その結果について $p_1=p_2=\frac{1}{2}$ の場合を図4、 $p_1=\frac{1}{4}, p_2=\frac{3}{4}$ の場合を図5に示す。

図4及び図5から、超相対論的極限では S は0もしくは有限の値をとることがわかる。 S が0になることは式 (3.29) をもちいて説明することができる。実験室系では、 $\theta=\frac{\pi}{2}$ を除いて状態ベクトルは「spin-triplet 状態」という純粋状態へと収束する。したがって、このとき S は0となる。この結果は質量0の粒子の spin 方向が自身の運動方向を向くことと整合している。

一方、 $\theta=\frac{\pi}{2}$ では S は超相対論的極限において有限の値へと収束する。spin-singlet 状態 $|\varphi_p(0)\rangle$ は実験室系では spin-triplet 状態となるが、 $|\varphi_p(\frac{\pi}{2})\rangle$ は α や ϕ に関係なく実験室系でも spin-singlet 状態である。そのため、spin-singlet 状態と spin-triplet 状態の混合がおき S は0でない値をもつ。

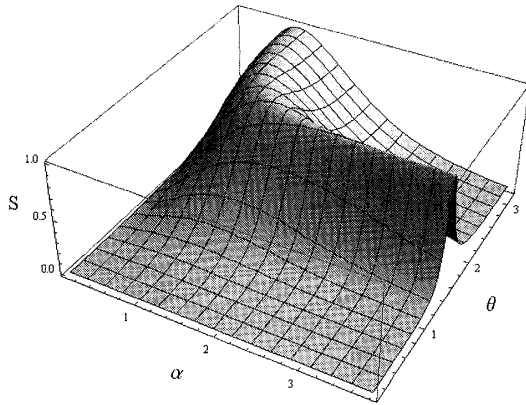


図4: 状態 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)$ での von Neumann のエントロピー。ここで $p_1=p_2=\frac{1}{2}$, $\phi=\tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

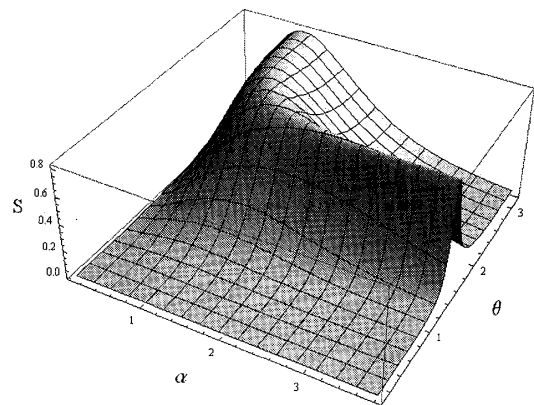


図5: 状態 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)$ での von Neumann のエントロピー。ここで $p_1=\frac{1}{4}$, $p_2=\frac{3}{4}$, $\phi=\tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

5.2.1 von Neumannのエントロピーの最大値

図4及び図5において、まず S は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で非対称あることがわかる。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ では、超相対論的極限のとき S は最大値 S_{\max} へと収束する。また $\theta > \frac{\pi}{2}$ の領域では、まず S は α とともに増加して、ある α で S_{\max} となり、超相対論的極限で減少していく。 S_{\max} の「場所」は ϕ, α 及び θ に依存する。von Neumannのエントロピーは量子状態の「純度」(purity)を意味する。そのため最大値は、どれだけ純度が下がることになるかをあらわす。

密度行列(式(5.13))をspin-singlet状態とspin-triplet状態という2つの基底をもちいて表現すると以下ようになる。

$$\rho'_{\Lambda p}(0, \theta) = \begin{pmatrix} p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2 & p_1 a_{\Lambda p}(0) b_{\Lambda p}^*(0) + p_2 a_{\Lambda p}(\theta) b_{\Lambda p}^*(\theta) \\ p_1 a_{\Lambda p}^*(0) b_{\Lambda p}(0) + p_2 a_{\Lambda p}^*(\theta) b_{\Lambda p}(\theta) & p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

ここで $a_{\Lambda p}(\theta)$ 及び $b_{\Lambda p}(\theta)$ は式(3.22)及び式(3.23)から与えられる。

$\theta > \frac{\pi}{2}$ の領域では、後述するように S はある α 及び ϕ において最大値をとる。このことは以下から説明できる。式(5.15)より次式が導かれる。

$$\det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)] = p_1 p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2 |b_{\Lambda p}(0)|^2 (\cos \theta - 1)^2 \quad (5.16)$$

まず $0 \leq \det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)] \leq p_1 p_2$ であることがわかる。そして $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)$ の固有値 λ_1 及び λ_2 が

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4\det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)]}}{2} \quad (5.17)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - 4\det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)]}}{2} \quad (5.18)$$

であることから、 $\det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)] = p_1 p_2$ のとき S は最大値となることがわかる。

$\det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)] = p_1 p_2$ であるためには、次の条件を満たさなければならない。

$$|a_{\Lambda p}(\theta)|^2 |b_{\Lambda p}(0)|^2 (\cos \theta - 1)^2 = 1 \quad (5.19)$$

この式は α, ϕ 及び θ が以下の関係式を満たすときに成り立つ。

$$\left(\frac{\cosh \alpha + \cosh \phi}{\sinh \alpha \sinh \phi} \right)^2 = -\cos \theta \quad \text{for } \theta > \frac{\pi}{2} \quad (5.20)$$

この関係式は α 及び ϕ に対して対称である。 $\det[\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)] = p_1 p_2$ のとき、式(5.17)及び式(5.18)から $\lambda_1 = p_1$ 及び $\lambda_2 = p_2$ である。したがって、最大値は

$$S_{\max}(0, \theta) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 \quad \text{for } \theta > \frac{\pi}{2} \quad (5.21)$$

となる。

$\theta > \frac{\pi}{2}$ において、 S_{\max} となる α は次の式から与えられる。

$$\cosh \alpha = \frac{-\cosh \phi - \sinh^2 \phi \sqrt{-\cos \theta (1 - \cos \theta)}}{1 + \cos \theta \sinh^2 \phi} \quad (5.22)$$

$\phi \rightarrow \infty$ ($v \rightarrow 1$) の極限では、相対速度の rapidity は

$$\cosh \alpha \rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{\cos \theta}} \quad \text{for } \theta > \frac{\pi}{2} \quad (5.23)$$

となる。ここで $\tanh \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 - \cos \theta}}$ となるので、 S_{\max} となる α の領域は

$$\tanh^{-1} \sqrt{\frac{1}{1 - \cos \theta}} < \alpha < \infty \quad \text{for } \theta > \frac{\pi}{2} \quad (5.24)$$

となる。このとき、 θ が π になるにつれて α の下限は減少する。そのため、 $\theta = \pi$ での S_{\max} は、相対速度 α が最も低い場合の最大値である。同様に、式 (5.22) において ϕ と α を置き換えることで、 α をもちいて $\cosh \phi$ を記述することができる。

また、式 (5.20) は次のように書き換えられる。

$$\frac{a_{\Lambda p}(0) a_{\Lambda p}(\theta)}{b_{\Lambda p}(0) b_{\Lambda p}(\theta)} = -1 \quad (5.25)$$

$a_{\Lambda p}(0) = -b_{\Lambda p}(\theta)$, $b_{\Lambda p}(0) = a_{\Lambda p}(\theta)$ とすると、

$$M_{\Lambda p}(0) M_{\Lambda p}(\theta) = 0 \quad (5.26)$$

となる。これは、von Neumann のエントロピーが式 (5.21) となる場合と一致する。また縮約した密度行列 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)$ は、 $M_{\Lambda p}(0)$ に対する状態と $M_{\Lambda p}(\theta)$ に対する状態で対角化されている。

5.3 von Neumann のエントロピーと Shannon のエントロピー

この拡張されたモデルにおける実験室系での Shannon のエントロピーを導出する。Shannon のエントロピーは測定されたデータの von Neumann のエントロピーに対応する。したがって、縮約した密度行列 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta)$ から得られる次の確率を使う。

$$P(|\uparrow\downarrow\rangle) = P(|\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2}{2} \quad (5.27)$$

$$P(|\uparrow\uparrow\rangle) = P(|\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2}{2} \quad (5.28)$$

このとき Shannon のエントロピーは次のようになる。

$$S_{\text{Sh}}(0, \theta) = -\left(p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2\right) \log \left(p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2\right) \\ - \left(p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2\right) \log \left(p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2\right) + 1 \quad (5.29)$$

式 (5.29) において θ は $\sin^2\theta$ 及び $\cos^2\theta$ という形で含まれるので、Shannon のエントロピーは $\frac{\pi}{2}$ で対称となる。

$(p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4})$, $(p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{3}{4})$ 及び $(p_1 = p_2 = \frac{1}{2})$ の場合に対する結果を図6から図8に示す。

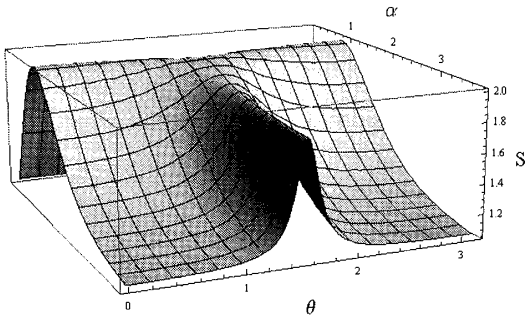


図6: spin 相関の Shannon のエントロピー。
ここで $p_1 = \frac{3}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $\phi = \tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

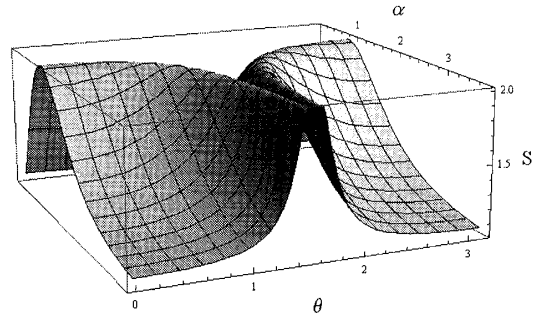


図7: spin 相関の Shannon のエントロピー。
ここで $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $\phi = \tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

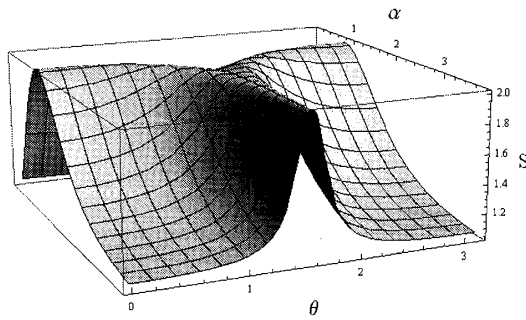


図8: spin 相関の Shannon のエントロピー。
ここで $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $\phi = \tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

5.4 区別できない状態 (Indistinguishable state)

$\theta=0$ で「右方向」に動いている粒子を粒子A、「左方向」に動いている粒子を粒子Bとする。したがって、 $\theta>\frac{\pi}{2}$ では粒子Aは「左方向」に粒子Bは「右方向」に動いていることになる。そのため、式 (5.12) の場合、 $\theta>\frac{\pi}{2}$ の状態と $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の状態が同じでないことから、粒子Aと粒子Bの「区別」を暗に取り入れていることになる。よって、Shannonのエントロピーと異なり、von Neumannのエントロピーは $\theta=\frac{\pi}{2}$ で非対称の値となる。

粒子Aと粒子Bの区別をなくすため、式 (5.12) の代わりに空間的に反対称化された状態を準備する。この反対称化された状態を以後「区別できない状態」とよぶ。この状態は、式 (5.6) における粒子対が4つの場合として導入することができる。このとき反対称化の条件として、 $c_1=-c_3$, $c_2=-c_4$ とし、 $\theta_1=0$, $\theta_2=\theta$, $\theta_3=\pi$, $\theta_4=\pi+\theta$ とする。ここで c_1 及び c_2 を式 (5.12) と同様にするため、 $\sum |c_i|^2=2$ である。したがって、状態ベクトルは次のようになる。

$$|\psi_p(0, \theta, \pi, \pi + \theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(c_1 |\varphi_p(0)\rangle + c_2 |\varphi_p(\theta)\rangle) - (c_1 |\varphi_p(\pi)\rangle + c_2 |\varphi_p(\pi + \theta)\rangle) \right] \quad (5.30)$$

この状態ベクトルから実験室系での von Neumann のエントロピーが計算できる。その結果、von Neumann のエントロピーは Shannon のエントロピーと「絶対値が1」異なるだけで、同じとなる (図9～11 参照)。

式 (5.30) から縮約した密度行列 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta, \pi, \pi + \theta)$ は「spin-singlet 状態」と「spin-triplet 状態」の基底をもちいて対角化できる。

$$\rho'_{\Lambda p}(0, \theta, \pi, \pi + \theta) = \begin{pmatrix} p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2 & 0 \\ 0 & p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

したがって、この状態は spin-singlet 状態と spin-triplet 状態の混合状態とみなすことができる。このとき、von Neumann のエントロピーは次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\text{vN}}(0, \theta) &= - \left(p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2 \right) \log \left(p_1 |a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |a_{\Lambda p}(\theta)|^2 \right) \\ &\quad - \left(p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2 \right) \log \left(p_1 |b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2 |b_{\Lambda p}(\theta)|^2 \right) \\ &= S_{\text{Sh}}(0, \theta) - 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

このエントロピーは式 (5.12) から得られたエントロピーとは異なり、 $\theta=\frac{\pi}{2}$ で対称となっている。一方、式 (5.12) から得られた Shannon のエントロピーと式 (5.30) から得られた Shannon のエントロピーは同一である。

5.5 Shannon のエントロピーと区別できない状態の von Neumann のエントロピーの極値

「区別できる」状態の von Neumann のエントロピーにおいて、 α と ϕ が関係式 (5.20) を満たすとき最大値をとり、その値は式 (5.21) で与えられる。一方、Shannon のエントロピーと「区別できない」状態の von Neumann のエントロピーは以下の関係式を満たすとき極値をとる。

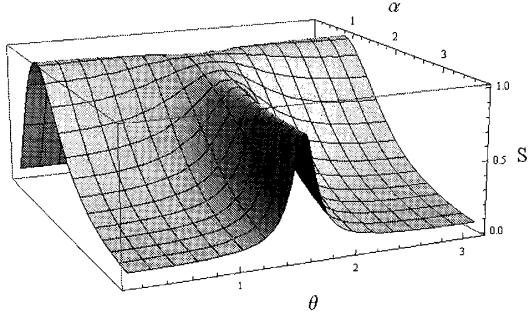


図9: 区別できない状態 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta, \pi, \pi+\theta)$ の von Neumann のエントロピー。ここで $p_1 = \frac{3}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $\phi = \tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

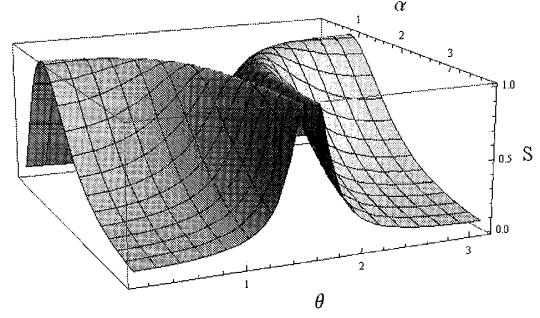


図10: 区別できない状態 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta, \pi, \pi+\theta)$ の von Neumann のエントロピー。ここで $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $\phi = \tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

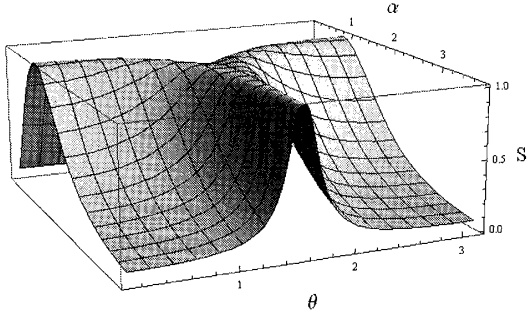


図11: 区別できない状態 $\rho'_{\Lambda p}(0, \theta, \pi, \pi+\theta)$ の von Neumann のエントロピー。ここで $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $\phi = \tanh^{-1}0.999$; $0.1 \leq \alpha \leq \tanh^{-1}0.999$, $0.1 \leq \theta \leq \pi$ 。

$$\left(\frac{\cosh \alpha + \cosh \phi}{\sinh \alpha \sinh \phi} \right)^2 = \frac{(p_1 - p_2) \sin^2 \theta + \sqrt{(p_1 - p_2)^2 \sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta}}{2} \quad (5.34)$$

この関係式は、関係式 (5.20) と異なり、 θ のみではなく p_1 と p_2 にも依存している。

$p_1 - p_2 > 0$ では、 S は任意の θ に対して有限の値をとり、その最大値は Shannon のエントロピーでは 2 となり、von Neumann のエントロピーでは 1 である。次に $p_1 - p_2 < 0$ の場合を考える。式 (5.34) の右辺は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で 0 となり、これは α と ϕ が超相対論的極限であることを意味する。この極限では、極値は $|a_{\Lambda p}(0)|^2 = |b_{\Lambda p}(\frac{\pi}{2})|^2 = 0$ 及び $|b_{\Lambda p}(0)|^2 = |a_{\Lambda p}(\frac{\pi}{2})|^2 = 1$ であることから、

$$S_{\text{Sh(ex)}}(0, \frac{\pi}{2}) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 + 1 \quad (5.35)$$

となり、また、

$$S_{\text{vN(ex)}}(0, \frac{\pi}{2}) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 \quad (5.36)$$

である。 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ において、極値は最大値であり Shannon のエントロピーでは2、von Neumann のエントロピーでは1となる。

$\theta = \frac{\pi}{2}$ では、 $M_{\Lambda p}(\frac{\pi}{2})$ 状態が spin-singlet 状態であるため、 p_2 は spin-singlet 状態の重みとなる。しかし、式 (5.31) に着目すると p_1 は spin-singlet 状態と spin-triplet 状態の混合状態の重みとなっていることがわかる。したがって、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ かつ $p_1 - p_2 < 0$ のとき、spin-singlet 状態の重みは spin-triplet 状態の重みに比べて常に大きい。このとき、spin-singlet 状態と spin-triplet 状態の混合が等しくならないことから、極値は2もしくは1より小さいことになる。したがって、状態は確率 p_2 の spin-singlet 状態と確率 p_1 の spin-triplet 状態の混合状態とみなすことができる。一方、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ かつ $p_1 - p_2 > 0$ では、式 (5.34) を α と ϕ が満たすとき、spin-singlet 状態の重みと spin-triplet 状態の重みは等しくなる。このとき、極値は最大値2もしくは1をとる。

次に $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ の場合を考える。このとき、式 (5.34) は式 (5.20) と等しくなる。よって、区別できる状態の von Neumann のエントロピーと Shannon のエントロピー及び区別できない状態の von Neumann のエントロピーは $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ において同様に振る舞う。この特別な場合は、様々な特徴が $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ で縮退していることになる。

また、 $p_1 \gg p_2$ もしくは $p_1 \ll p_2$ のとき、von Neumann のエントロピーについて次のことがわかる。区別できる状態のエントロピーは0へと収束する。したがって、 $\rho'_\Lambda(0, \theta)$ によって表現された状態は、純粋状態へととなる。しかし、Shannon のエントロピーと区別できない状態の von Neumann のエントロピーは2もしくは1の最大値をとることになる。

5.6 考察

spin は相対論的には共変でない概念であり、共変な量として spin と4元運動量からなる Pauli-Lubanski ベクトルという量が知られている。しかしながら、本研究におけるエントロピーの議論において、 σ であらわされる spin と4元運動量は独立して取り扱う。そのために4元運動量について trace をとった縮約した密度行列を使う。したがって、このエントロピーは相対論的に共変な量ではない。

今回の拡張モデルにおける特別な場合として、粒子の速度と Boost 変換の速度は共に $x-z$ 面に制限し、spin 状態は重心系と同様に実験室系の z 方向に空間的に固定して表現されている。粒子対状態が2つの場合、実験室系における状態ベクトルは4元運動量と spin がもつれた状態となる。4元運動量を trace することによって得られる縮約した密度行列から計算された von Neumann のエントロピーは、方向パラメーターの θ だけでなく、速度パラメータである α 及び ϕ にも依存する。この結果は、静止系で定義されている spin の方向が Wigner 回転のため実験室系では速度と連動して傾くためであり、式 (5.15) より

$a_{\Lambda p}(0)$, $b_{\Lambda p}(0)$, $a_{\Lambda p}(\theta)$ と $b_{\Lambda p}(\theta)$ をもちいて相関が記述されることから説明できる。

$\theta_1 = 0$ 及び $\theta_2 = \theta$ をもちいた今回のモデルでは、Shannon のエントロピーは $\theta = \frac{\pi}{2}$ で対称となる。しかし、von Neumann のエントロピーは対称ではない。この非対称性は2つの粒子の区別可能性からくる。この Shannon のエントロピーは次の密度行列 $\rho = \frac{1}{2}(a|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + b|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\uparrow| + b|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow| + a|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow|)$ で得られる von Neumann のエントロピーとみなすことができる。ここで、 $a = p_1|a_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2|a_{\Lambda p}(\theta)|^2$ 及び $b = p_1|b_{\Lambda p}(0)|^2 + p_2|b_{\Lambda p}(\theta)|^2$ である。

区別可能性の下では、 $|\varphi_p(\theta)\rangle$ は $|\varphi_p(\theta + \pi)\rangle$ と異なる。しかし、各々の状態は4元運動量について trace をとると同一である。 $U(\Lambda)|\varphi_p(\theta)\rangle$ 及び $U(\Lambda)|\varphi_p(\theta + \pi)\rangle$ は、4元運動量と spin に関してはもつれていない状態である。よって、4元運動量について trace をとっても純粋状態のため von Neumann のエントロピーは0である。しかしながら、空間的に反対称化された状態として $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_p(\theta)\rangle - |\varphi_p(\theta + \pi)\rangle)$ を準備すると、この区別できない状態 $U(\Lambda)|\psi\rangle$ はもつれた状態となり、von Neumann のエントロピーは有限の値をもつ。 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_p(0)\rangle - |\varphi_p(\pi)\rangle)$ のとき、von Neumann のエントロピー $S(\phi, \alpha, 0, \pi)$ は式 (5.14) と同じ式となる。したがって、区別できない「1つの粒子対」の状態は「2つの粒子対状態の重ね合わせ」とみなすことが可能である。よって、 $p_1 \gg p_2$ もしくは $p_1 \ll p_2$ の場合でも、区別できない状態の von Neumann のエントロピーは有限の値をとり、spin-singlet 状態と spin-triplet 状態が等しく混合しているとき1となる。

区別不可能性の下、von Neumann のエントロピーは式 (5.33) でみてとれるように「絶対値が1」異なるだけで Shannon のエントロピーと一致する。しかしながら、エントロピーに対する Lorentz 変換の効果にのみ着目することを考えると、 $\alpha = 0$ かつ $\phi = 0$ の状態では0として Shannon のエントロピーは再定義できる。

謝辞

有益な議論、ご助言、ご指導をして頂いた佐藤文隆教授に深謝します。数々のご支援、ご助言を下された太田雅久教授に感謝の意を表します。

A エントロピー

A.1 Shannon のエントロピー

A.1.1 定義

ある確率分布 $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ が与えられたとき、Shannon のエントロピー S は次式で定義される。

$$S = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i \quad (\text{A.1})$$

ここで p_i は、 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ の拘束条件をもつ。また $0 \log 0 \equiv 0$ とする。式 (A.1) は無次元量であるが、対数の底に対して任意性がある。そこで対数の底が2のときビット (bit) という単位でよび、対数の底が自然対数 e のときはナット (nat) という単位でよぶ。本稿は対数の底を2とする。

拘束 $\sum p_i = 1$ のもと $p_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i$ とすると、式 (A.1) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{i=1}^{N-1} p_i \log p_i - p_N \log p_N \\ &= -\sum_{i=1}^{N-1} p_i \log p_i - \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i\right) \log \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

この式を p_k で偏微分をおこなうことにより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p_k} &= -\log p_k - p_k/p_k + \log \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i\right) + \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i\right)}{\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i\right)} \\ &= -\log p_k + \log p_N \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

が導かれる。この式は $p_k = p_N$ のとき 0 となる。任意の p_k に対して $p_k = p_N$ が成り立つためには $p_k = p_N = 1/N$ でなければならない。したがって、 $p_i = 1/N$ のとき Shannon のエントロピー（式 (A.1)）は極値をもつ。このとき極値は最大値であり、

$$S = \log N \quad (\text{A.4})$$

となる。

A.1.2 Shannon のエントロピーと観測方法

Shannon のエントロピーについて、coin-flipping と偏光の 2 つの例を示す。この 2 つはともに確率事象が 2 状態の場合の例である。しかし、後に述べるように coin-flipping の例ではエントロピーは 1 つの値に定まることに対して、偏光の例ではエントロピーは「観測方法」によって異なる。

coin-flipping のエントロピー

coin-flipping において、表がでる確率及び裏がでる確率を等確率であると仮定する。すなわち「表がでる確率」=「裏がでる確率」= $1/2$ である。したがって、Shannon のエントロピーの値は、

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。また、この値は確率事象が 2 つの場合、すなわち確率分布が $\{p_1, p_2\}$ となる場合におけるエントロピーの最大値でもある。

偏光のエントロピー

右回り円偏光の光子を 70% の確率で、水平線偏光の光子を 30% の確率で放出する光源が

あるとする。

このとき、円偏光での観測を考える。水平線偏光として放出された光子を円偏光として観測する場合、右回り円偏光と左回り円偏光が等確率で観測される。したがって、この光源から放たれた光子を観測したとき、右回り円偏光が観測される確率は85%、左回り円偏光が観測される確率は15%となる。したがって Shannon のエントロピーは、

$$S = -0.85 \log 0.85 - 0.15 \log 0.15 \sim 0.60984 \text{ [bit]} \quad (\text{A.6})$$

となる。

同様に線偏光での観測を考える。右回り円偏光として放出された光子を線偏光として観測した場合、水平線偏光として観測される確率と垂直線偏光として観測される確率は等確率である。このことを考慮にいと、水平線偏光が観測される確率は65%、垂直線偏光が観測される確率は35%となり、Shannon のエントロピーは、

$$S = -0.65 \log 0.65 - 0.35 \log 0.35 \sim 0.92407 \text{ [bit]} \quad (\text{A.7})$$

となる。

Shannon のエントロピーは「確定している場合」、すなわち確率 $P=1$ のとき 0 である。したがって、円偏光での観測結果は線偏光での観測結果に比べて偏りが大きいことを Shannon のエントロピーは定量的に示している。または、確率事象が 2 におけるエントロピーの最大値は 1 であることから、線偏光での観測結果のほうがより乱雑だということを示している。

このように Shannon のエントロピーは観測の仕方が異なることで値が異なる量である。

A.2 von Neumann のエントロピー

A.2.1 定義

von Neumann のエントロピーは次式で定義される。

$$S = -\text{Tr}[\rho \log \rho] \quad (\text{A.8})$$

$$= -\sum \lambda_i \log \lambda_i \quad (\text{A.9})$$

ここで ρ は密度行列であり、 λ_i は密度行列 ρ の固有値である。また、 $\log \rho$ は行列の「関数」であり、次のように定義される。

$$\log \rho = \sum_i (\log \lambda_i) |i\rangle\langle i| \quad (\text{A.10})$$

ここで、 $|i\rangle$ は固有値 λ_i の固有ベクトルであり、正規直交基底である。式 (A.8) は trace をとるため、密度行列 ρ をどの基底で表現しても S の値はかわらない。

密度行列が純粋状態、すなわち単一の状態ベクトル $|\psi\rangle$ で与えられた場合、密度行列は $|\psi\rangle$ 基底で表現できるため、von Neumann のエントロピーは、

$$\begin{aligned}
S &= -\text{Tr}[\psi\langle\psi|\log|\psi\rangle\langle\psi|] \\
&= -1\log 1 = 0
\end{aligned}
\tag{A.11}$$

となる。このことは、「状態」が純粋状態によって「準備」されるとき von Neumann のエントロピーは「恒常的」に 0 となることを意味する。ここで「恒常的」という表現は、どのような Unitary 変換のもとでも不変であることを意味する。このことは、「準備」された状態ベクトルを単一の基底とする観測を考えると、情報量は 0、すなわち観測結果が常に同一であることを意味する。

von Neumann のエントロピーは複数の「状態」による混合を考えたとき、 $S \geq 0$ となる。等号が成り立つ場合、状態は純粋状態であることを意味する。したがって、von Neumann のエントロピーは「状態」の混合度合をあらわす。

von Neumann のエントロピーは、Shannon のエントロピーと「情報」を扱う概念として近いものであるが、量子状態という、非古典的な状態に焦点をあてているため、同一ではない。このことを例によって示す。

単一 spin 状態ベクトルのエントロピー

spin の状態ベクトルとして、

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle \tag{A.12}$$

を考える。ここで、 $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ である。 $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とした場合、「量子的 coin-flipping」とみなすことができる。しかし、von Neumann のエントロピーは Shannon のエントロピーにおける coin-flipping での値 1 とは異なる。この状態ベクトルの von Neumann のエントロピーは純粋状態であることから式 (A.11) より恒常的に

$$S = 0 \text{ [bit]} \tag{A.13}$$

となる。

偏光のエントロピー

先述の偏光のエントロピーにおける状況での、von Neumann のエントロピーを計算する。

右回り円偏光の状態ベクトルを $|R\rangle$ 、水平線偏光の状態ベクトルを $|H\rangle$ とする。水平線偏光の状態ベクトルは右回りの円偏光の状態ベクトル $|R\rangle$ と左回りの円偏光の状態ベクトル $|L\rangle$ の重ね合わせとして記述できる。

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle)$$

したがって密度行列 ρ は

$$\begin{aligned}\rho &= 0.70 |R\rangle\langle R| + 0.30 |H\rangle\langle H| \\ &= 0.85 |R\rangle\langle R| + 0.15 |R\rangle\langle L| + 0.15 |L\rangle\langle R| + 0.15 |L\rangle\langle L|\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

となり、行列で表現すると、

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.15 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

となる。 ρ の固有値をもとめることで、von Neumannのエントロピーは式 (A.9) より、

$$S \sim 0.52709 [\text{bit}] \quad (\text{A.16})$$

となる。線偏光基底で行列を表現しても結果は同じである。

この値は Shannon のエントロピーにおける偏光の例で示した値(A.6), (A.7)よりも少ない。

A.3 Shannonのエントロピーと von Neumannのエントロピー

偏光の例で示したように von Neumannのエントロピーは Shannonのエントロピーよりも少なくなる。また Shannonのエントロピーは「観測の仕方」に応じて値が変わるが、von Neumannのエントロピーは系が設定されれば単一に決まる。一般に von Neumannのエントロピーは「状態」の重ね合わせを仮定したときに計算されるエントロピーの最小値であり、Shannonのエントロピーという古典的概念にはあらわれない量子状態特有の概念である。

密度行列は、純粋状態の密度行列 ρ_i の混合によってつくられる。

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i \quad (\text{A.17})$$

ここで、 $\sum p_i = 1$ である。しかし、密度行列がどのような基底であらわされるかは任意であるため、密度行列 ρ の表現は一意的ではない。von Neumannのエントロピーは密度行列 ρ を対角したときに表現される基底で量子状態を観測する場合にあらわれる値である。密度行列が純粋状態である場合、純粋状態は単一の基底で表現が可能のため、その基底があらわす物理状態で観測する場合、結果は常に同じである。したがって、式 (A.11) があらわすように von Neumannのエントロピーは0となる。しかし、単一 spin 状態ベクトルの例において spin 状態 $|\uparrow\rangle$ 及び $|\downarrow\rangle$ を観測するとした場合の Shannonのエントロピーは通常の coin-flipping の例と同じ方法で計算されるため1となる。このように von Neumannのエントロピーは純粋状態においては常に0となるが、Shannonのエントロピーは von Neumannのエントロピーとは異なる値をとる。「測定後」の系について、状態は確率 $\frac{1}{2}$ で $|\uparrow\rangle$ もしくは $|\downarrow\rangle$ となることから $\frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ という混合状態になる。したがって Shannonのエントロピーは測定データによる von Neumannのエントロピーと一致する。

密度行列が混合状態であらわされる場合、対角化された密度行列は複数の互いに直交している基底で表現されていることになる。観測可能な物理状態は「計算上、最低限」、そ

の基底の数だけ存在し、したがって式 (A.9) によって計算された結果、von Neumann のエントロピーは0より大きな「単一」の値をとる。しかし、Shannon のエントロピーは偏光の例のように「同じ対象」を観測する場合でも「観測の仕方」によって異なる値をもつ。

Shannon のエントロピーは「情報」に対する我々の無知の度合い、もしくは我々が「情報」をどれだけ区分できるかを定量的にあらわす概念である。von Neumann のエントロピーも同様に我々が「観測可能な物理状態」に対する無知の度合い、もしくは我々が「観測可能な物理状態」を「最低限」どれだけ区分できるかを定量的にあらわす概念であるといえる。物理学として注意をしなければならないのは、熱力学のエントロピーと混同してはいけない、ということである。確かに情報理論の概念である Shannon のエントロピーを統計力学にあてはめることで最終的には熱力学のエントロピーへと議論を展開することは可能である。したがって、Shannon のエントロピーと熱力学のエントロピーに関連があることは確かである。しかし、熱力学のエントロピーから Shannon のエントロピーという概念をもたらすことはできない。Shannon のエントロピーは熱力学のエントロピーをも含んだ概念ではあるが、熱力学のエントロピーでは Shannon のエントロピーの概念を語ることはできない。

von Neumann のエントロピーは情報理論としての Shannon のエントロピーを「観測結果」という「情報」を扱う量子論に対して適用した概念であるため、熱力学のエントロピーのような物理現象がエントロピーの極大値へと進む、といった「時間の矢」としての概念とは「一般には」異なる概念である。

von Neumann のエントロピーが0以上の値を持つ場合として次の二つが想定できる。一つは我々がある量子系を想定する場合に混合状態として物理状態を想定する場合である。もう一つは物理状態がテンソル積をもちいた状態ベクトルであらわされる場合である。この様な状態ベクトルは、「互いに関連する物理状態」という「情報」がテンソル積によって関連付けられている、といえる。いま、ある「情報」に対して「無視」することを考える。すなわちテンソル積をもちいた状態ベクトルからつくられた密度行列に対して部分 trace という操作をいれて縮約する。このとき、密度行列は縮約する前は単一の状態ベクトルからつくられ純粋状態として記述されているが、縮約した密度行列は混合状態となる。例えば spin-singlet 状態

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \quad (\text{A.18})$$

は純粋状態であるため、von Neumann のエントロピーは0である (Shannon のエントロピーは例えば spin 相関 $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ 及び $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ の観測を考える場合、1となる)。いま左もしくは右、どちらか一方のブラケットの情報を無視することを考える。このとき密度行列は縮約され、

$$\frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (\text{A.19})$$

となる。この密度行列は純粋状態 $|\uparrow\rangle$ と純粋状態 $|\downarrow\rangle$ の混合状態であり、von Neumann のエントロピーは1となる。

B 運動量状態の trace の計算

式 (5.10) の $\text{Tr}_{\text{4m}}[\cdot]$ の計算について述べる。

Lorentz 不変 delta 関数の性質、

$$p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) = k^0 \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (\text{B.1})$$

から、状態ベクトル (式 (3.11)) が

$$\langle p', \sigma' | p, \sigma \rangle = \delta_{\sigma', \sigma} \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (\text{B.2})$$

を満たすためには、

$$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} \quad (\text{B.3})$$

でなければならない。[23]

このことから式 (3.21) は規格化因子をもちいて記述すると以下のようにになる。

$$\begin{aligned} U(\Lambda) | \varphi_p(\theta) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p_j)^0}{p_j^0}} \left[a_{\Lambda p}(\theta) (| \Lambda p_i, \uparrow \rangle | \Lambda q_i, \downarrow \rangle - | \Lambda p_i, \downarrow \rangle | \Lambda q_i, \uparrow \rangle) \right. \\ &\quad \left. + b_{\Lambda p}(\theta) (| \Lambda p_i, \uparrow \rangle | \Lambda q_i, \uparrow \rangle + | \Lambda p_i, \downarrow \rangle | \Lambda q_i, \downarrow \rangle) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ここで $p_i = p(\theta_i)$ 、 $q_i = p(\theta_i + \pi)$ とした。trace を求めるため $\sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p_j)^0}{p_j^0}} | \Lambda p_i \rangle \langle \Lambda p_j |$ について考える。

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p_j)^0}{p_j^0}} \langle \Lambda p_k | \Lambda p_i \rangle \langle \Lambda p_j | \Lambda p_k \rangle \\ &= \sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p_j)^0}{p_j^0}} \delta^3(\vec{\Lambda p_k} - \vec{\Lambda p_i}) \delta^3(\vec{\Lambda p_j} - \vec{\Lambda p_k}) \\ &= \sqrt{\frac{(\Lambda p_i)^0}{p_i^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p_j)^0}{p_j^0}} \delta^3(\vec{\Lambda p_k} - \vec{\Lambda p_i}) \frac{p_k^0}{(\Lambda p_k)^0} \delta^3(\vec{p_j} - \vec{p_k}) \\ &= \begin{cases} \delta^3(\vec{\Lambda p_i} - \vec{\Lambda p_i}) \delta^3(\vec{p_k} - \vec{p_k}) & \Lambda p_k = \Lambda p_i \text{ and } p_k = q_i \\ 0 & \Lambda p_k \neq \Lambda p_i \text{ or } p_k \neq q_i \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで Lorentz 不変 delta 関数の性質、

$$p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) = (\Lambda p)^0 \delta^3(\vec{\Lambda p}' - \vec{\Lambda p}) \quad (\text{B.6})$$

をもちいた。

以上のことを踏まえると、 $U(\Lambda)|\psi\rangle = \sum_i c_i U(\Lambda)|\varphi_p(\theta_i)\rangle$ がなす密度行列（式（5.7））の4元運動量状態に対する trace は、

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda_m}[U(\Lambda)|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger(\Lambda)] = \sum_i p_i M_{\Lambda_p}(\theta_i) \quad (\text{B.7})$$

となる。ここで $p_i = |c_i|^2$ とし、

$$M_{\Lambda_p}(\theta_i) = \begin{pmatrix} |a_{\Lambda_p}(\theta_i)|^2 & a_{\Lambda_p}(\theta_i)b_{\Lambda_p}^*(\theta_i) \\ a_{\Lambda_p}^*(\theta_i)b_{\Lambda_p}(\theta_i) & |b_{\Lambda_p}(\theta_i)|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

である。この行列は基底 $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle)\}$ で表現されている。

参考文献

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. **47** (1935), 777.
- [2] Asher Peres, Petra F. Scudo and Daniel R. Terno, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 230402.
- [3] Asher Peres and Daniel R. Terno, Int. J. Quant. Info. **1** (2003), 225.
- [4] Chopin Soo and Cyrus C. Y. Lin, Int. J. Quant. Info. **2** (2004), 183.
- [5] Marek Czachor, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 078901.
- [6] Robert M. Gingrich and Christoph Adami, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 270402.
- [7] Marek Czachor, Phys. Rev. A **55** (1997), 72.
- [8] Hiroaki Terashima and Masahito Ueda, Int. J. Quant. Info. **1** (2003), 93.
- [9] Hiroaki Terashima and Masahito Ueda, Quantum Inf. Comput. **3** (2003), 224.
- [10] Doyeol Ahn, Hyuk-jae Lee, Young Hoon Moon and Sung Woo Hwang, Phys. Rev. A **67** (2003), 012103.
- [11] Young Hoon Moon, Sung Woo Hwang and Doyeol Ahn, Prog. Theor. Phys. **112** (2004), 219.
- [12] Stephen D. Bartlett and Daniel R. Terno, Phys. Rev. A **71** (2005), 012302.
- [13] Song He, Shuxin Shao and Hongbao Zhang, J. Phys. A **40** (2007), F857.
- [14] Song He, Shuxin Shao and Hongbao Zhang, Int. J. Quant. Info. **6** (2008), 181.
- [15] C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1895.
- [16] Jozef Gruska, *QUANTUM COMPUTING* (McGraw-Hill International, UK, 1999).
- [17] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [18] Asher. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998).
- [19] D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, New York, 1951).
- [20] John S. Bell, Physics **1** (1964), 195.

- [21] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 1804.
- [22] Roger Penrose, *THE EMPEROR'S NEW MIND* (Oxford University Press, Oxford, 1989).
- [23] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [24] Chris J. Isham, *LECTURES ON QUANTUM THEORY* (Imperial College Press, London, 1995).

Quantum Entanglement and Special Relativity

Yoshihisa Nishikawa

Department of Physics, Faculty of Science and Engineering, Konan University
Okamoto 8-9-1, Higashinada-ku, Kobe 658-8501, Japan

(Received April 25, 2008)

Abstract

Quantum entanglement was suggested by Einstein to indicate that quantum mechanics was incomplete. However, against Einstein's expectation, the phenomenon due to quantum entanglement has been verified by experiments. Recently, in quantum information theory, it has been also treated as a resource for quantum teleportation and so on. In around 2000, it is recognized that quantum correlations between two particles of one pair state in an entangled spin-state are affected by the non-trivial effect due to the successive Lorentz transformation. This relativistic effect is called the Wigner rotation. The Wigner rotation has to be taken into account when we observe spin-correlation of moving particles in a different coordinate frame. In this paper, first, we explain quantum entanglement and its modification due to the Wigner rotation. After that, we introduce an extended model instead of one pair state model. In the extended model, quantum entanglement state is prepared as a superposition state of various pair states. We have computed the von Neumann entropy and the Shannon entropy to see the global behavior of variation for the spin correlation due to the relativistic effect. We also discuss distinguishability between the two particles of the pair.